

# 不完備金融証券経済の研究

張家樂

要旨

本論文の目的は、不完備金融証券市場の特徴とその特徴に規定される不完備金融証券経済の性質を分析することにある。具体的には、完備・不完備証券構造と所得移転の可能性の特徴づけを行った上で、均衡価格の存在条件とその意義を明示し、総超過需要関数の性質と均衡財価格集合の特徴を明らかにする。

本論文の基本的な視点は、財の純取引と所得移転によって生じる「変換」の性質に着目することである。経済主体から見れば、財市場を通じて行われる財の純取引は、ある財を財市場に提供することによって財市場がそれを他の財に変換し、自分に提供してくれることに過ぎない。その意味で、財の純取引は財市場における変換として理解できるであろう。同様に、所得移転もある状態における所得から他の状態における所得への変換として理解することができる。このような変換の視点から見れば、均衡はすべての経済主体による変換の総効果が0となる状況である。経済において、制約のない変換は存在しえない。ワルラス経済の場合、ワルラス法則を満たす財の純取引だけが実現可能となる。変換に対するこの制約の程度をわれわれは財空間とワルラス法則を満たす財の純取引の空間との次元の差として表す。より一般的には、制約の程度は考察する変換の空間と実現可能な変換の空間との次元の差として表現し、制約度とよぶことにする。この意味において、ワルラス経済は制約度1の経済である。

本論文では $S$ 個の状態が存在する2期の金融証券経済を考察する。そのとき、所得移転の空間の次元は初期の状態を含め $(S + 1)$ である。金融証券を利用して実現可能な所得移転の空間の次元は証券構造の階数に依存する。証券構造の階数を $d$ とすると、証券構造の制約度は $(S + 1 - d)$ となる。証券構造とは各状態における証券配当を行ベクトルとする行列である。初期に各証券1単位を購入すると、末期にある状態が起るとき、受け取るその状態における貨幣の額の組は、その状態における証券配当という。初期の状態における証券配当は負の証券価格となる。制約度が

1( $> 1$ ) のとき，証券構造は完備（不完備）であるという．完備（不完備）証券構造を持つ金融証券経済は完備（不完備）金融証券経済である．

ワルラス経済のような制約度が1の経済については多くの研究蓄積がある．しかし，今までのように，これらを金融証券経済（特に制約度が1より大きい不完備金融証券経済）に単純に適用すると多くの困難に遭遇する．例えば，ワルラス経済の場合と同様に，財価格空間の開単体から均衡価格を見つけようとするとき，予算集合の下半連続性が満たされないという難題に直面する．

本論文における主な分析手法は，制約度が1より大きい不完備証券構造をその制約度と等しい数に「分割」することである．分割されたそれぞれの部分証券構造が，ある特定の意味で制約度が1の完備証券構造と見なしうるという事実を用いて，制約度が1の経済における研究成果を不完備金融証券経済に適用する．部分証券構造は証券構造の部分行列である．本論文では，新たに導入するこのような分析手法との関連で，次の3つの主要な結果を得た．

1．無裁定証券構造は，制約度  $(S + 1 - d)$  個の相互に関連する完備かつ無裁定部分証券構造によって特徴づけられる．金融証券を利用して正の所得移転ができないとき，証券構造は無裁定であるという．

2．任意の無裁定証券価格が与えられたとき，上記の  $(S + 1 - d)$  個の部分証券構造に対応する  $(S + 1 - d)$  個の部分財集合（財の集合） $C_k, k = 1, \dots, (S + 1 - d)$  がある．各部分財集合からそれぞれ1種類の財を取り出した  $(S + 1 - d)$  種類の財の組を考える．任意のこのような組に対し，それに属するすべての財の初期賦存量を持つ経済主体が存在すれば，与えられた証券価格を均衡証券価格とする均衡財価格が次の財価格の集合に存在する．この財価格の集合とは，各部分財集合  $C_k$  の財価格空間の開単体  $\Delta_{\#C_k}$  の直積集合  $\prod_{k=1}^{S+1-d} \Delta_{\#C_k}$  である．

3．任意の無裁定証券価格が与えられたとき，上記の経済主体の初期賦存量に関する条件が成立すれば，均衡財価格集合と上記の財価格の集合  $\prod_{k=1}^{S+1-d} \Delta_{\#C_k}$  との共通部分は非空かつコンパクトである．逆に各  $\Delta_{\#C_k}$  の非空かつコンパクト部分集合の直積集合  $A$  に対し，均衡財価格集合と  $\prod_{k=1}^{S+1-d} \Delta_{\#C_k}$  との共通部分が  $A$  に等しい金融証券経済が存在する．

本論文は4つの章から構成される．以下，各章について順次その概要を述べたい．

第1章では，本論文で考察する金融証券経済モデルを描写する他に，ワルラス経済，完備金融証券経済，特に不完備金融証券経済における均衡価格の存在に関する今までの成果を，統一した視点から分析する．分析に当たり，特に注目するのは，従来重要視されなかった，均衡価格がどのような特徴を持つ価格の集合に存在するか，

あるいは均衡価格を見つけるのにどのような価格の集合が適切であるか、という問題である。均衡価格を見つけようとする価格の集合を均衡価格探索空間とよぶことにしよう。均衡価格探索空間に均衡価格を見つけられるためには、そこにおいて、需要のありうる動きに対応できるような価格の調整能力が確保され、価格の調整に対する需要の反応の連続性が保証されなければならない。一般に、両者の成立しやすさは、均衡価格探索空間の大きさに関してちょうど対極に位置する。ワルラス経済の場合、均衡価格探索空間として財価格空間の開単体  $\Delta_C$  は両者の要求を満たしている。ここで  $C$  は財の数である。完備金融証券経済の場合、均衡価格の存在は基本的にワルラス経済におけるそれに帰することができる。ワルラス経済の場合との違いは、証券価格の出現によって両者の要求を満たす均衡価格探索空間が2種類あることである。1つは、任意の無裁定証券価格  $q$  に対し、財価格空間の開単体  $\Delta_{C(S+1)}$ 、 $\{q\}$  の直積集合  $\Delta_{C(S+1)} \times \{q\}$  である。もう1つは、各状態における財価格空間の開単体  $\Delta_C$ 、無裁定証券価格空間  $Q$  の直積集合  $(\Delta_C)^{S+1} \times Q$  である。しかし、制約度が1より大きい不完備金融証券経済の場合、同じ均衡価格探索空間において、価格の調整能力が十分であるのに対し、需要の反応の連続性は保証されにくくなる。それを回復させるためには、証券配当と経済主体の初期賦存量に対し、より強い条件が求められる。

第2章では、証券構造と証券構造による所得移転の可能性の特徴づけを行う。既存文献では、完備と不完備との区別、および無裁定証券構造の特徴づけにとどまっている。

第2章の1番目の主な結果として、完備無裁定証券構造は、所得の変換レートを表す事象価格の存在によって特徴づけられることを明らかにした。所得の変換レートとは2つの状態に対し、他の状態における所得が変化せずに、1つの状態における所得を追加的に1単位入手するために、手放すもう1つの状態における所得の額である。事象価格とは、証券構造とそれとの積が0となるような厳密に正のベクトルである。事象価格は本論文で導入した概念で、従来それに近い概念として状態価格がある。状態価格は初期の状態における所得で基準化された事象価格として理解できる。無裁定証券構造の特徴づけにおいて、両者は同じ役割を果たす。しかし、証券構造が不完備のとき、所得移転のレートが存在しないので、基準化は概念上の矛盾に陥る恐れがある。

一般的な無裁定証券構造の特徴づけについては、少し正確さがかけるが、無裁定証券構造はその制約度  $(S + 1 - d)$  個の部分証券構造に分けられ、各部分証券構造は完備かつ無裁定である。厳密に説明するために次の概念を導入する。部分状態集合

(状態の集合)  $S$  に対し,  $S$  に属する状態における配当を行ベクトルとする部分証券構造  $M_S$  の制約度が 1 以下のとき,  $M_S$  は完備である.  $S$  における正の所得移転ができないとき,  $M_S$  は無裁定である. 他の部分状態集合  $T$  における所得移転との関係を考える.  $T$  における所得移転が決まっても,  $M_S$  の制約度が 1 以下のとき,  $M_S$  は  $M_T$  に独立な完備である.  $T$  における所得移転が 0 のとき,  $S$  における正の所得移転ができないとき,  $M_S$  は  $M_T$  の条件つき無裁定である. このようにして, 欠けた正確さは部分証券構造間の次のような関係で補うことができる. 1 番目の部分証券構造は完備かつ無裁定である. 他の部分証券構造は, 自分の順番までの部分状態構造に独立な完備で, それの条件つき無裁定である.

したがって, 第 2 章の 2 番目の主な結果は以下のようにまとめられる. 無裁定証券構造は次の条件を満たす部分証券構造  $M_{S_k}, k = 1, \dots, (S + 1 - d)$  の存在によって, 特徴づけられる.

(1)  $M_{S_1}$  は完備かつ無裁定である.

(2)  $M_{S_k}, k = 2, \dots, (S + 1 - d)$  はそれぞれ  $M_{\cup_{m=1}^{k-1} S_m}$  に独立な完備であり,  $M_{\cup_{m=1}^{k-1} S_m}$  の条件つき無裁定である.

証券構造の特徴づけに関する成果を利用して, 第 2 章の 3 番目の主な結果として, 無裁定証券構造による所得移転の可能性が次の性質によって特徴づけられることを解明した. 上記の  $(S + 1 - d)$  個の部分証券構造に対応する部分状態集合  $S_k, k = 1, \dots, (S + 1 - d)$  に対し, 各部分状態集合からそれぞれ任意の 1 つの状態を除けば, 残りのすべての状態における所得移転は自由にできる.  $S_1$  の残りの状態における所得移転が決まれば, 除かれた状態における所得移転も決まる. 前者が正であれば, 後者は負である. 他の部分状態集合  $S_k$  に対し, 自分の順番までの部分状態集合における所得移転と,  $S_k$  の残りの状態における所得移転が決まれば, 除かれた状態における所得移転も決まる. 前者が正であれば, 後者は負である.

第 3 章では, 第 2 章の成果に基づき, 均衡価格探索空間に均衡価格を見つけられるための条件を明らかにし, その意義を議論する. 均衡価格探索空間に均衡価格が見つかるために必要な, 総超過需要関数の連続性, 境界条件と発散条件をそれぞれ保証する以下の 3 つの条件を第 3 章で提起する. 発散する価格の列に対応する総超過需要量が発散するとき, 総超過需要関数は発散条件を満たすという.

(I) 均衡価格探索空間の内部に属する価格について, 証券価格が変動できる場合は, 任意の価格に対し, すべての経済主体は初期の状態に正の所得, その他の状態に非負の所得を保有するように所得の移転ができる.

(II) 均衡価格探索空間の境界に属する価格について, 財価格が厳密に正でない

状態に対し，証券価格が変動できない場合は，その状態に正の所得，その他の状態に非負の所得を保有するように，所得の移転ができる経済主体が少なくとも1人存在する．証券価格が変動できる場合は，その状態における正の所得は，初期賦存量による所得である．さもなければ，その状態に正の所得を保有する経済主体は同時に初期の状態にも正の所得を保有する．無裁定でない証券価格に対し，初期の状態に正の所得，その他の状態に非負の所得を保有するように，所得の移転ができる経済主体が少なくとも1人存在する．

(III) 均衡価格探索空間において発散する証券価格の列があるとき，それに対し，ある状態に無限の正の所得，その他の状態に非負の所得を保有するように，所得の移転ができる経済主体が少なくとも1人存在する．

第3章の1番目の主な結果として，次の3種類の均衡価格探索空間において，条件(I)(II)と(III)が成立すれば，均衡価格が存在することを明らかにした．

(1) 各状態における財価格空間の開単体，無裁定証券価格空間の直積集合  $(\Delta_C)^{(S+1)} \times Q$  .

(2) 初期に経済主体の消費と初期賦存量がない場合に，末期の各状態における財価格空間の開単体，無裁定証券価格空間のコンパクト部分集合  $\tilde{Q}$  の直積集合  $(\Delta_C)^S \times \tilde{Q}$  .

(3) 任意の無裁定証券価格  $q$  が与えられたとき，前述の  $(S+1-d)$  個の部分証券構造に対応する部分財集合  $C_k, k = 1, \dots, (S+1-d)$  に対し，各部分財集合  $C_k$  の財価格空間の開単体  $\Delta_{\#C_k}$ ， $\{q\}$  の直積集合  $\prod_{k=1}^{S+1-d} \Delta_{\#C_k} \times \{q\}$  .

条件(I)(II)と(III)を明確にすることによって，均衡価格の存在を保証する経済の構成要素（具体的には証券配当と経済主体の初期賦存量）に関する条件を見つけることが容易になる．つまり，どのような均衡価格探索空間において，どのような証券配当と経済主体の初期賦存量のもとで，条件(I)(II)と(III)が保証されるかを考えればよい．第3章の2番目の主な結果として，均衡価格探索空間(3)に対し，次のような経済主体の初期賦存量に関する存在条件を見つけた．上記の各部分財集合  $C_k, k = 1, \dots, (S+1-d)$  からそれぞれ1種類の財を取り出した  $(S+1-d)$  種類の財の組を考え，任意のこのような組に対し，それに属するすべての財の初期賦存量を持つ経済主体が少なくとも1人存在する．ここでの証明手法を用いれば，Cassトリックを必要としない．

均衡価格探索空間(3)における均衡価格の発見は次の経済学的な意義がある．

(a) 不完備金融証券経済における均衡価格の存在には次の条件が欠かせないと従来考えられていた．すべての経済主体は初期の状態に正の所得，その他の状態に非

負の所得を保有するように所得の移転ができる．確かに Polemarchakis and Siconolfi が提示した，以上の条件を満たさない例では，均衡価格探索空間 (2) に均衡価格がない．しかし，均衡価格探索空間 (3) に均衡価格を見つける手法を使えば，均衡価格の存在は証明できる．実に以上の条件は，条件 (I) の証券価格が変動できる場合の特例である．この結果は不完備金融証券経済において，均衡価格探索空間の選択の重要性を示唆する．ワルラス経済の場合には，均衡価格の存在は財価格空間の開単体のみを確認すればよいのに対し，不完備金融証券経済の場合には，ある 1 種類の均衡価格探索空間のみを確認するだけでは均衡価格を見逃す恐れがある．

(b) 均衡価格探索空間 (3) に均衡価格が見つかるためには，貨幣と金融証券が欠かせない．これは貨幣と金融証券には均衡の存在をもたらす役割があることを意味する．

第 4 章では，不完備金融証券経済における総超過需要関数の性質と均衡財価格集合の特徴を明らかにする．

第 4 章の 1 番目の主な結果として，総超過需要関数は次の性質を持つことを示した．無裁定証券価格が与えられたとき，総超過需要関数は下に有界で，連続であり，前述の部分財集合  $C_k, k = 1, \dots, (S + 1 - d)$  に対し，連鎖ノンフリーランチ条件を満たし，前述の財価格の集合  $\prod_{k=1}^{S+1-d} \Delta_{\#C_k}$  における境界条件を満たす．総超過需要関数が次の条件を満たすとき， $C_k, k = 1, \dots, (S + 1 - d)$  に対し，連鎖ノンフリーランチ条件を満たすという． $C_1$  に属する財の総超過需要量は正であってはならない．他の部分財集合  $C_k$  に対し，自分の順番までの部分財集合に属する財の総超過需要量が 0 のとき， $C_k$  に属する財の総超過需要量は正であってはならない．前者が有界であれば，後者も有界である．部分財集合が 1 つしかないとき，連鎖ノンフリーランチ条件は，ワルラス法則またはノンフリーランチ条件になり， $\prod_{k=1}^{S+1-d} \Delta_{\#C_k}$  における境界条件は，従来の財価格空間の開単体  $\Delta_{C(S+1)}$  における境界条件になる．ノンフリーランチ条件はワルラス法則の一般化で，総超過需要量が正であってはならないことを要求する．したがって，無裁定証券価格が与えられたときの総超過需要関数の性質は，ワルラス経済または完備金融証券経済の場合のその一般化である．

ワルラス経済の場合，均衡財価格集合は財価格空間の開単体の非空かつコンパクト部分集合によって，特徴づけられることが知られている．第 4 章の 2 番目の主な結果として，金融証券経済における均衡財価格集合について，次のことを明らかにした．金融証券経済が完備であっても，均衡財価格集合と財価格空間の開単体  $\Delta_{C(S+1)}$  との共通部分はコンパクトではない．与えられた無裁定証券価格を均衡証券価格とする均衡財価格集合については，完備のとき， $\Delta_{C(S+1)}$  の非空かつコンパクト部分集

合によって、特徴づけられる。不完備のとき、 $\Delta_{C(S+1)}$ ではなく、 $\bigcap_{k=1}^{S+1-d} \Delta_{\#C_k}$ との共通部分が非空かつコンパクトである。逆に、 $\bigcap_{k=1}^{S+1-d} \Delta_{\#C_k}$ の非空かつコンパクト部分集合  $A$  が各  $\Delta_{\#C_k}$  の非空かつコンパクト部分集合の直積集合であれば、均衡財価格集合と  $\bigcap_{k=1}^{S+1-d} \Delta_{\#C_k}$  の共通部分がこの  $A$  に等しいような金融証券経済が存在する。

第4章の最後に、均衡価格を見つけることができる最小の価格の範囲として、均衡価格空間という概念を導入する。経済の集まりにおける均衡価格空間とは次のような価格の集合である。経済の集まりに属する任意の経済に対し、少なくとも1つの均衡価格が均衡価格空間に存在する。均衡価格空間の任意の真部分集合に対し、経済の集まりに少なくとも1つの経済が存在し、それにおけるすべての均衡価格が真部分集合に属さない。第4章では、 $C$  財のワルラス経済の集まりにおける均衡価格空間として財価格空間の開単体  $\Delta_C$  があることを確認する。

第4章の3番目の主な結果としては、任意の無裁定証券価格  $q$  に対し、ある適切に選ばれた不完備金融証券経済の集まりにおいて、均衡価格探索空間(3)が均衡価格空間であることを明らかにした。その経済的な意味は次のように考えられる。均衡を導くためには、証券価格が調整されることも、すべての財の相対価格が調整されることも必要なく、 $(S+1-d)$  個の部分財集合  $C_k$  に属する財の相対価格さえそれぞれ調整されればよい。