一橋大学審査博士学位論文

“Belief, Rationality, and Equilibrium in Game Theory”

要旨

石川竜一郎

平成１５年６月

論文の構成

本論文の目的は、ゲーム理論や市場経済理論における均衡を、意思決定主体が保有する私的情報や主体の認識状況から特徴付けることにある。本論文は以下の四章から構成される。

第一章　背景と基本概念（Background and Basic Notions）

第二章　**p** 確信の情報伝達による合意（Consensus on p-Belief Communication）

第三章　非分割情報下の合理的期待（Rational Expectations on Non-partitional Information）

第四章　知識・合理性・逐次均衡（Knowledge, Rationality, and Sequential Equilibrium）

以下で各章における研究の目的・背景・分析方法及び主結果について概観する。

1　背景と基本概念

ゲーム理論の中心的な解概念の一つである『ナッシュ均衡』は、相手の戦略が与えられた時に互いに最適反応になっている状態を定式化したもので、今日では相互依存的（ゲーム的）状況の分析に広く用いられている。ナッシュ均衡が達成される時、どの主体も自分の戦略を変更する誘因を持たない。なぜならば均衡が形成される背後で、各主体が独立に行う推論によって「相手がナッシュ均衡戦略を選択する」という帰結に到達し、その主体全てが相手の均衡戦略に対して自分の利得を最大にするための最適な行動をとるためである。各主体が「相手がナッシュ均衡戦略を選択する」という帰結に到達するためには、「相手がどのような行動をとるか」を認識することはもちろん、「相手に自分の行動をどのように認識されているか」、さらに「自分がどのように認識していると相手が認識しているか」…という認識の無限連鎖を考えなければならない。これは自分の利得が自分の行動のみならず、相手の行動にも依存していることに起因する。

ある事実に関して、主体間でこのような「認識の無限連鎖」が成立している時、その事実は主体間で共通認識（common knowledge）になっているという。ナッシュ均衡は各主体の最適反応戦略の組であり、最適反応の決定には認識の無限連鎖を考えなければならない。しかし、人間が自分の能力を用いて「無限」の状態を考えることは難しく、その能力によって共通認識がどのように実現されるかは自明ではない。加えて能力の制約がどのように（どの程度）の制約なのかをも明示化する必要がある。この様な問題意識から、第一章において認識及び確信モデルを定式化し基本的な性質を概観したあと、以下の三つの問題

1. 共通認識を達成するための過程
2. 共通認識、もしくは均衡達成に要請される主体の認識能力の提示
3. 主体の認識と均衡の関係

に焦点を当てて論じる。

2　p 確信の情報伝達

2.1　目的

本節では、異なる情報を持つ主体の事象に対する事後的確率を、情報交換を通じて等しくしていく過程を考察する。たとえ各主体の必ずしも正確ではない確信をその情報として交換したとしても、全ての主体の事後的確率の値は一致することを示す。

2.2　背景

Aumann (1976) は共通認識を定式化し、「たとえ主体が異なる情報を持っていても、起った事象に対する各々の事後的確率の値が共通認識されるならば、その値は一致する」という命題を示した。

この命題は、たとえ非対称的情報を主体が持っていたとしても、共通認識はその非対称性を対称化してしまうという意味で、共通認識がもつ強い特性を示唆した。しかし、認識の無限連鎖を形成する強い状況がどのように達成されるのかは決して自明ではない。

Geanakoplos and Polemarchakis (1982)、Cave(1983)、Parikh and Krasucki (1990) は共通認識が主体間の反復的な情報交換によって達成されることを示した。特に Parikh and Krasucki は、高々一人の主体にのみ情報を送る状況を分析した。この状況下では、全ての主体の情報を各主体が受け取れるわけではないため、多人数の主体間で共通認識が達成されることは容易ではない。それでもなお、反復的な情報交換によって全員の事後的確率が一致することを彼らは示した。

しかしこれら一連の研究はすべて、事後的確率そのものを情報として交換していた。本稿では必ずしも正確ではない確信を情報として送る状況を分析する。このような確信の情報交換を繰り返すことで、各主体の事後的確率が一致することを示す。さらに本稿で考察される情報交換の反

復の手順は、Parikh and Krasucki とは異なり、必ずしも一定周期で反復されるとは限らない枠組みでなされている。

2.3 分析方法

Monderer and Samet(1989) にしたがって主体の確信を定式化する。世界の起こりうる状態全ての集合を Ω で表し、その元を ω とする。主体の非対称情報は Ω 上の分割で与えられる。こうして表現された各主体の私的情報による事象 X(Ω の任意の部分集合) に対する事後的確率が p 以上であるとき、「主体が事象 X を $\mathbf{p}$ 確信する」という。

事象 X が生起したとき、非対称情報を持つ全ての主体が各々の私的情報を用いて、事象 X に関する事後的確率を計算する。状態 ω における主体 i の事象 X に対する事後的確率を $q_i(\omega)$ と書く。各主体 i は ω において【$\mathbf{q}_i(\omega)$ 確信】している事象をメッセージとして、各期に情報送信者と受信者を指定する手続き (protocol) のもとで情報を伝達する。その手続きでは、以下の条件を満たすものとする。

- 前期の情報受信者は、次期の情報送信者となる。
- 各期の情報受信者は、その後に必ず再び情報受信者となる。

メッセージを受信した主体は、その情報を用いて自分の私的情報を改訂し、新たな私的情報を用いて事後的確率を計算し、メッセージを作成・送信する。主体間で毎期間このようなメッセージの送受信を繰り返す。

本章では主体が虚偽情報を送信することは考察の対象外であり、また確信を送信する以外で、誤った情報を送ることも考えない（すなわち、事後的確率が p のときに p 以下の確信を誤って送信することはない)。

各主体がどのように私的情報を改訂し、メッセージを作成するかを見ていく。状態 ω を固定する。生起した事象 X に対して各主体 i は各々の ω における私的情報 $\Pi_i(\omega)$ を得る。これを 0 期としよう。そのもとで事象 X に対する 0 期の主体 i の事後的確率 $q_i^0(\omega)$ を計算する。この事後的確率を用いて【$\mathbf{q}_i^0(\omega)$ 確信】している事象のメッセージ $M_i^0(\omega)$ を作成し、手続きによって指定された 0 期の情報送信者はそのメッセージを送信する。0 期の情報受信者 j はメッセージ $M_i^0(\omega)$ を受け取り、自分が現在保有している情報 $Q_j^0(\omega)(=\Pi_j^0(\omega))$ と受信したメッセージ $M_i^0(\omega)$ の共通部分 $Q_j^0(\omega)\cap M_i^0(\omega)$ をとることで、情報構造を改訂する。ここで受信したメッセージ $\{M_i^0(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ は、状態空間 Ω 上の分割構造になっていないため、改訂された情報も必ずしも分割構造にはならない。したがって、受信者は改訂された情報構造をもとに、分割情報構造 $\Pi_j^1(\omega)$ を $\{\xi\in\Omega|\ Q_j^0(\xi)\cap M_i^0(\xi)=Q_j^0(\omega)\cap M_i^0(\omega)\}$ によって形成する。こうして形成された $\Pi_j^1(\omega)$ を次期の私的情報とし、事象 X に対する事後的確率 $q_j^1(\omega)$ を計算し【$\mathbf{q}_j^1(\omega)$ 確信】している事象のメッセージを手順によって指定された相手に送信する。

この過程を繰り返した時の、各主体の生起事象に対する事後的確率の値を考察する。主体の私

的情報が全く改訂されなくなった後に、全ての主体の各状態 ω における事象 X に対する事後的確率が一致するとき、主体間で合意に到達したという。

2.4 結論

以上のように各主体 i の事象 X に対する事後的確率 q_i を用いて形成された【$\mathbf{q}_i$ 確信】のメッセージを、手順に従って情報交換を行ったときに、以下の結論を得る。

定理 2.1. 情報交換の手順に従って、状態 ω において各主体 i が各 t 期に【$\mathbf{q}_i^t(\omega)$ 確信】している事象の送信を繰り返すとき、主体間で合意に到達する。

2.5 まとめ

Monderer and Samet (1989) は、「主体の事後的確率が共通$\mathbf{p}$確信となっているならば、主体間の事後的確率の違いは $1-p$ を下回る」ことを示したが、本章の結果は情報交換によってその差を0にできることを示した。また、Ishikawa, Matsuhisa, and Akagawa (2002) において課された『全ての情報送信者は必ず有限期間内で自分が情報を送信した相手から情報を受け取る』という非循環手順の条件を課すことなく、事後的確率の一致の帰結を得ている。

3 非分割情報下の合理的期待

3.1 目的

本節の目的は、将来の財配分に不確実性をもつ主体が、各々の私的情報を保有した上で、リスクを減じるために条件付き財（contingent commodities）を取引する経済の分析にある。状態空間上の非分割的な情報を持つ主体が参加する市場で達成される均衡を、主体の認識論的な観点から特徴付ける。

3.2 背景

経済主体が非対称情報の保有や取引する財の生産高・価格等の不確実性に直面するとき、如何にしてリスクを管理するかという問題は経済学において古くから扱われてきた。この問題を一般均衡理論の枠組みで捉え、各主体が価格から情報を獲得し、自分の私的情報を改訂した上で期待効用を最大にしているときに需給が一致する『合理的期待均衡』の概念を導入したのは Radner (1979) であり、より抽象的な測度空間上で精緻な分析を行ったのが Allen (1981) である。これらの二つの研究を発端とする合理的期待均衡の研究では、主体が持つ私的情報が測度空間上の σ 加法族として表現され、それは即ち各主体の私的情報が状態空間 Ω 上の分割で表現されることを意味した。

共通認識の概念を市場経済の主体間に適用し、その観点から市場均衡を特徴づける研究が Milgrom and Stokey (1982) に始まる。彼らは不確実性を伴う交換経済において、情報をまったく得られない【事前期】、私的情報を得る【中間期】の二期間の条件付財の配分を考察した。【事前期】において条件付財がパレート最適な配分を初期保有量として持っていることを前提としたとき【中間期】に私的情報を追加的に得られたとしても、「各主体が取引を行う誘引を持っている」ことが共通認識になっているならば、実際の取引は取引をしないときの効用水準と等しく、特に全ての主体が危険回避的であるならば取引は 0 になるという、いわゆる『無投機定理』を示した。さらにこの定理は合理的期待均衡とも関連付けられ、事前期においてパレート最適性が満たされている財配分のもとでは、合理的期待均衡配分は初期保有量に一致することを示した。

これらの研究では、主体の持つ情報構造は状態空間上の分割であり、性質**(T)**（世界で起こらないことは、主体は認識できない）・**(4)**（主体がある事象を認識しているとき、自分が認識していることを認識する）・**(5)**（主体がある事象認識していないとき、自分がそれを認識していないことを認識する）を主体の認識能力として課したものであった。

このような分析の中で、Geanakoplos (1989) は公理**(5)** を要請しない主体によってプレイされる不完備情報ゲームの分析を行った。彼は性質**(T)**・**(4)** に加えて「入れ子状（nested)」の情報構造を要請した。そのような情報構造を持つ主体によってプレイされる不完備情報ゲームの枠組みで Milgrom and Stokey (1982) で分析された不確実性下の交換経済の分析も行い、非分割情報下の無投機定理を証明した。

本章は Geanakoplos の研究の延長線上にあるが、入れ子状の情報構造を想定せずに【主体の期待効用に関する合理性】（主体が自分の期待効用を認識している）という条件に置き換えた上で分析を行う。

3.3　分析方法

n 人の経済主体が状態に依存する l 財の交換を行う経済を考える。各主体は、私的情報をまったく得られない【事前期】、私的情報を得る【中間期】、状態が確定し情報が完全に顕示する【事後期】の三期に直面する。各主体は事後期に於けるリスクを減じるために、私的情報を得る中間期で条件付き財の取引を行う。ここで、取引主体が得られる情報は反射律と推移律のみを満たす Ω 上の非分割構造として与えられ、この情報から生成される加法族 $\mathcal{F}_i$ を用いて初期保有量とノイマン・モルゲンシュテルン効用関数に制約を与える。

- 各主体の初期保有量 e_i は $\mathcal{F}_i$ 可測。
- 各主体のノイマン・モルゲンシュテルン効用関数 u_i は $\mathcal{F}_i$ 可測。

その下で以下の合理的期待均衡が定義される。

定義 3.1. 財配分と価格の組み合わせが以下の条件を満たすとき、その組み合わせを合理的期待均衡と呼ぶ。

（1）各状態で、各財配分の総和が初期保有量の総和を超えていない。

（２）各個人の財配分は、各状態で与えられる予算制約式を満たす。
（３）各状態で予算制約を満たした下で、私的情報と価格から得られる情報を用いて、各個人の期待効用が最大化されている。

さらに本章では、主体に要請する性質**(T)** および **(4)** とは別の合理性を主体に課す。

定義 3.2 (期待に関する合理性). 各主体は、各状態において中間期に自分の期待効用を知っている。

この合理性は情報構造に関する制約となるが、Geanakoplos(1989) で課した入れ子状の情報構造とは無関係であり、情報構造が入れ子状になっていなくとも以下で示す定理が成立する。

3.4　結論

以下の三つの主定理が証明される。

定理 3.1. 各個人が期待に関する合理性もっているならば、ただ一つの合理的期待均衡が存在する。

定理 3.2. 事前期でパレート最適な配分は、主体が期待に関する合理性もっている下での合理的期待均衡配分と同値であり、さらにその配分は事後期における配分（競争均衡配分）と一致する。

定理 3.3. 各個人が期待に関する合理性もっており、取引をして効用が減少しないことが共通認識であるならば、その取引から得られる効用はゼロ取引の時と同じ効用である。さらに全ての主体が危険回避的であるならば、取引量はゼロである。

3.5　まとめ

本章では Geanakoplos(1989) を追究し、非分割で入れ子状でもない情報構造を持つ主体の取引を考察した。ここでは【期待に関する合理性】が中心的な役割を果たしている。この要請の元では情報構造が入れ子状である必要はなく、Geanakoplos で扱えなかった広いクラスの情報構造で分析が可能になる。

4　認識・合理性・逐次均衡

4.1　目的

本章では、逐次均衡が主体のいかなる認識条件によって導出されるかを考察する。展開型ゲームにおいて均衡の認識論的特徴づけを行う意義は、均衡を導出する主体の合理性が明確になっていないことに起因する。この問題は完全情報ゲームにおいて明示化されており、逆戻り推論法（backward induction）が主体の合理的思考の帰結とは言い難いことが指摘されている。この指摘に答えるべく、本章では逐次均衡を考察することで、展開型ゲームにおける均衡の導出に必要な合理性の認識論的な特徴づけを行う。

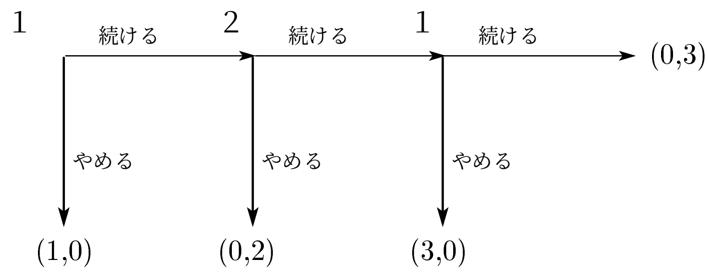

図 1: Rosenthal のムカデゲーム

本章で得られる主結果を完全情報ゲームに適用したとき、先行研究とは異なる結論を導出することができる。本章の後半ではその違いが、どこにあるかについて論じる。

4.2 背景

近年、合理性が故に導かれるいくつかの逆説的事実が指摘されている。その一つとして『逆戻り推論法の逆説』がある。これは、Rosenthal(1981) で提示されたムカデゲームを考えることで明確になる。ムカデゲームとは図１で描かれた二人の主体が交互に、ゲームを「続ける」か「やめる」かの意思決定を繰り返すゲームである。ここでは主体１が二回、主体２が一回だけ手番をもつムカデゲームを考えよう。括弧内の数字は、（主体１の利得，主体２の利得）とする。

この完全情報ゲームの逆戻り推論法の解は、全ての主体が各々の手番でゲームを「やめる」ことを選択することである。この一見合理的と思われる選択が、実は主体の不合理な思考を含意していることが指摘されている。逆戻り推論法では到達する手番のみならず、実際には到達しえない手番における戦略を、あたかも到達したかのように想定して決定するため、相手が不合理な戦略をとらない限り到達し得ない手番に対しても到達したと想定する「合理的な馬鹿（rational fool)」を主体は演じることになる。図のムカデゲームに対応させるならば、主体１が均衡として最初の手番で「やめる」と選択しているにも関らず、主体２は主体１が「続ける」と選択したものとして、自分の手番の戦略を決定している。Reny(1993) 及び Ben-Porath（1997）は、主体１が「続ける」と選択してはじめて自分の手番に到達するという事実を、主体２が意思決定に反映させる状況を分析した。このとき、すべての主体が期待効用を最大化する均衡解は、必ずしも逆戻り推論法で得られる解と一致するとは限らないことを示している。

このような指摘に対して Aumann(1995) は、主体が各手番に到達したと想定して、「自分がとろうとしている戦略より期待効用を高くすることができる戦略を認識していない」という合理性が共通認識となっているのならば、逆戻り推論法とおなじ帰結を主体が得ることを示した。彼の見解では、『到達しない自分の手番にあたかも到達したと考えること』が非合理を意味するのではなく、『各手番に到達したと想定した時に、期待効用をより高くできない』ことが共通認識になっていることで、逆戻り推論法の解から離脱しないことが保証される。したがって、逆戻り推論法の解が得られていないのならば、それは単にその合理性が共通認識となっていないことを意味する

だけだと主張する。本研究では Aumann の主張に則り、不完全情報ゲームにおいてその主張が適用できることを示す。それにも関わらず、本章の結果を完全情報ゲームに適用したとき、Aumann とは異なる結論を得る。本章後半ではそれらの結論を比較する。

4.3 分析方法

展開型ゲームを定義した上で、逐次均衡を考える。通常与えられるゲームは、木構造・行動の集合・利得等で定義され、主体の認識構造は含まれない。均衡を認識論的に特徴付けるために、「主体が認識可能な状態の集合」を導入し、ゲームの構造と関連付ける。今、主体の認識可能な状態の集合を**状態空間**と呼び、主体の認識構造はこの状態空間上の**分割**として与える。ゲームの構造と認識構造を関連付けるために、状態空間から行動戦略の集合への写像を導入する。この写像を元に各主体の認識構造は「各々の主体の行動が互いに認識できる」という**公開情報**の条件を満たすように与えられると仮定する。

いま、展開型ゲームの各手番上で定義される任意の確信 μ が与えられたとしよう。その元で、μ **合理性**と μ **一貫性**を以下のように定義する。

- 各々の状態で行動戦略が実現したとき、その行動戦略と与えられた確信 μ で得られる期待効用よりも大きな期待効用を得ることができる行動戦略を主体 i が認識していないとき、主体 i が μ-**合理的**であると呼ぶ。

- 各々の状態で実現する行動戦略と確信 μ に収束する点列が存在し、その点列の各点における確信 μ が行動戦略の各点を用いたベイズの公式によって形成されている事象を μ **一貫的**と呼ぶ。

これらの事象を主体がどのように認識することで、逐次均衡が達成されるかを考察する。

4.4 結論

4.4.1 主定理

不完全情報ゲームを考える。主体の認識構造は「各主体の行動が相互に認識可能である」という公開情報の条件を満たすとする。このときに以下の結果を得る。

定理 4.1. 任意の確信 μ に対して、すべての主体が μ 合理的であり行動と確信の組み合わせが μ 一貫的である事象を主体が相互に認識しているならば、逐次均衡が実現する。

4.4.2 完全情報ゲームへの応用

上記の主定理を完全情報ゲームに適用する。逆戻り推論法では各主体は常に自分の手番に到達したと想定するため、確信 1 を全ての手番の上の確信として与える。主体が確信 1 を伴って μ 合

理的である事象を**1**-合理的と呼ぶ。このとき以下の結果を得る。

系 4.1. 公開情報の条件を仮定する。このとき、***1***-合理的であることを主体が相互に認識している事象と、逆戻り推論法で得られる解が実現する事象は同値。

我々が得ている系と Aumann の定理は以下の点で異なる。

1. 系では同値の結論を得ている。
2. Aumann が共通認識を要請しているのに対し、系では相互認識で十分である。

これらの違いは公共情報の条件に起因する。この条件によって、主体にゲームの構造に関する認識を内生的に与えているので、逆戻り推論法の事象から主体の行動に関する認識を導き出すことが可能になる。加えてこの条件は他の主体の行動を常に認識できるため、共通認識の要請をも不必要になる。

4.5　まとめ

本章では逐次均衡を認識論的に特徴付けた。我々が用いた μ 合理性は Aumann(1996) で示されているように、比較的弱い合理性である。主体の弱い合理性が認識されることで均衡が得られることは、均衡が過度な合理性を要求していないことを意味する。しかし、逐次均衡では別の問題に直面する。Kreps and Wilson(1982) が述べているように、行動と確信に収束する点列は全ての主体の推論過程を表す。すなわち、μ 一貫性の認識の要請は全ての主体の推論過程の認識の要請を意味する。それがどのように達成されるのかは本章ではまったく触れておらず、残された課題としたい。