博士学位請求論文審査報告

**片山直也**

Essays on Seasonally and Fractionally Differenced Time Series

## はじめに

本論文は，長期記憶時系列，すなわち，異時点間の従属関係が強くて，自己相関が緩やかにしか減少しないような時系列を対象として，統計的推測の問題を論じたものである．長期記憶性は，自己相関係数が，時差 $h$ の増加とともに $h^{2d-1}$ の程度でしか減少しないことで特徴付けられる．ここで，$d$ は差分パラメータであり，通常は 1/2 より小さい正の実数値である．なお，時系列モデルとして有名なボックス＝ジェンキンスの ARMA (Autoregressive Moving Average: 自己回帰移動平均) モデルは，自己相関が幾何級数的に減少することから，短期記憶モデルと呼ばれる．

長期記憶時系列に関する研究は，1980 年代前半から，グレンジャー，ホスキングらによって始まり，多くの理論的および実証的な研究がなされている．特に，差分パラメータ $d$ の推測に関しては，数多くの推定，検定問題が考察され，さまざまな結果が導出されてきたが，これらの研究の主たる対象は，季節性を考慮しない ARFIMA (Fractionally Integrated ARMA) モデルを前提にするものであった．それに対して，本論文の研究対象は，先行研究では必ずしも十分に議論されてこなかったトピックとして，季節性を含む場合の長期記憶時系列の統計的推測問題を考察している．上述のように，季節性を含まない場合の長期記憶モデルは ARFIMA モデルと呼ばれ，ボックス＝ジェンキンスの ARIMA (Integrated ARIMA) モデルの拡張として研究され，すでに計量経済学やファイナンスなどの分野で使われている．他方，自己相関が周期性をもって緩やかに減衰するような時系列は，ボックス＝ジェンキンスの季節的な ARIMA モデルの拡張であるものの，彼らにより提唱された識別，推定，診断，予測の手続きについては理論的な整備がなされていないのが現状である．本論文は，このような状況を踏まえ，季節性を考慮した長期記憶時系列モデルによる統計的分析の構築をめざしたものである．このような構想のもと，本論文は，具体的には，次の 3 つの章から構成されている．

第 1 章　The $k$-factor GARMA model （$k$ 個の因数をもつ一般化 ARMA モデル）

第 2 章　The SARFIMA model （季節性を考慮したフラクショナル ARIMA モデル）

第 3 章　Asymptotic prediction mean squared error for strongly dependent processes with estimated parameters （パラメータを推定した場合の強従属過程に対する漸近的な予測平均 2 乗誤差）

## 要旨

まず，第 1 章では，Woodward *et al.* (1998) が提唱した $k$ 個の因数を含む一般化 ARMA モデル

$$(1-L)^{d_1}(1+L)^{d_k}\prod_{j=2}^{k-1}(1-2\eta_j L+L^2)^{d_j}(x_t-\mu)=u_t \tag{1}$$

を取り上げて，その統計的性質を議論している．ここで，$d_j$ $(j=1,\cdots,k)$ は差分パラメータであり，$|d_j|<1/2$ が仮定される．また，$u_t$ は定常な ARMA 過程に従う誤差項である．このとき，時系列 $\{x_t\}$ は定常性が保証される．$k$ 個の因数とは，(1) の左辺に現れるラグ・オペレータ $L$ を含む因数であり，これらの零根は，いずれも単位円周上の値であるが，$\pm 1$ 以外に，複素単位根 $e^{i\nu_j}$ $(\nu_j=\cos^{-1}\eta_j)$ も考慮している点で，Hosking (1981) や Granger-Joyeux (1980) が最初に提案した ARFIMA モデルの拡張となっている．このように，複素単位根までも考慮する理由は，周期や季節性が含まれるデータの変動を描写するためである．その結果，通常の長期記憶性を描写する ARFIMA モデルと異なり，このモデルにおいては，自己相関関数が，一定ではないがあるサイクルで緩やかに減少し，スペクトル密度関数が各周波数 $\nu_j$ においても発散することになる．このような拡張により，長期記憶的な月次データや四半期データなど，季節性を含む時系列データの分析が可能となる．

本章における主要な考察は，フラクショナルな差分パラメータ $d_j$ $(j=1,\cdots,k)$ に関する推定および検定問題である．差分パラメータ $d_j$ の推定方法は，条件付き非線形最小 2 乗法であり，適当な正則条件のもとで，推定量の漸近正規性が示されている．そして，推定量の漸近分布の共分散行列は，フィッシャーの情報行列の逆行列に一致するという意味で，効率的であることがわかった．なお，複素単位根 $e^{i\nu_j}$ もパラメータではあるが，これらは既知とされている．他方，差分パラメータの検定問題においては，LM（ラグランジュ乗数）検定が導出されている．検定統計量は，残差系列の自己相関係数を使って構成されるもので，帰無分布は漸近的にカイ 2 乗分布に従うことが証明されている．これら

の理論的結果は，漸近的な性質に関わるものであり，有限標本における性質はシミュレーション実験により調べられており，有限標本においても，漸近的な性質に近い結果が成り立つことが示されている．

第 2 章は，季節性を考慮したフラクショナル ARIMA モデル

$$(1-L)^{d_0}\,(1-L^s)^{d_s}\,(x_t-\mu)=v_t \tag{2}$$

を考察の対象としている．ここで，$s$ は確定的な周期を表す偶数である．また，$v_t$ はボックス＝ジェンキンスの季節的 ARMA 過程に従う誤差項である．このモデルは，第 1 章で扱った $k$ 個の因数を含む一般化 ARMA モデルの特殊ケースである．なぜなら，

$$(1-L)^{d_0}\,(1-L^s)^{d_s}=(1-L)^{d_0+d_s}\,(1+L)^{d_s}\prod_{j=1}^{s/2-1}(1-2\cos(2\pi j/s)\,L+L^2)^{d_s} \tag{3}$$

と表されるので，$(1+s/2)$ 個の因数をもつ一般化 ARMA モデルと解釈できるからである．この解釈は，季節性をもつモデルの性質を調べる上で重要である．このことから，モデルの定常性は，$|d_0+d_s|<1/2$ かつ $|d_s|<1/2$ であることもわかる．したがって，第 1 章で得られた推定および検定に関する結果は，すべて成立するが，ここでのモデル表現にあわせた形で，定理を再構成している．

本章では，このモデルに即して，新たな問題も扱っている．具体的には，検定問題において，差分パラメータの値が，帰無仮説から $1/\sqrt{T}$ （$T$ は標本サイズ）のオーダーで離れている局所対立仮説を考え，LM 検定統計量が非心カイ 2 乗分布に従うことを示し，その非心度を求め，かつ，局所検出力を計算している．また，検定問題の特定化の誤りが与える影響についても考察している．例えば，$(1-L)^{\alpha}\,x_t=\varepsilon_t$ に対して検定すべきところを，$(1-L^s)^{\alpha}\,x_t=\varepsilon_t$ に対して検定する統計量を用いた場合，その検出力は著しく落ちることが見出される．さらに，Wald 検定も導出して，LM 検定と漸近的に同等であることが示されている．これらの理論的結果は，第 1 章と同様に，シミュレーションによって有限標本における妥当性が調べられている．

先行する 2 つの章が推定と検定という，トピックとしては統計学における代表的な推測問題を扱ったのに対して，第 3 章は予測の問題を論じている．先行研究においては，季節性を含まない長期記憶時系列に対しても，予測問題はあまり取り上げられていないトピックであるが，本論文では，季節性を考慮した長期記憶モデルによる予測を対象としており，その意味でもこの章は意欲的な内容を含んだ章であると言うことができる．具体的

には，まず，次の長期記憶モデルを考える．

$$(1-L^s)^d\,x_t = u_t \tag{4}$$

ここで，$s$ は偶数，$d$ は $0 < d < 1/2$，$u_t$ は定常な ARMA 過程に従う誤差項である．このとき，$x_t$ は定常となり，そのような $x_1, \cdots, x_n$ が与えられた場合，$h$ 期先の $x_{n+h}$ の予測量として，次の 3 種類のものを考える．第 1 は，最良線形予測量であり，パラメータが既知でなければ計算不可能であるが，他の実行可能な予測量の良さを比較する上での参考となる最適な予測量である．第 2 は通常の予測量であり， 最良線形予測量において，未知パラメータを条件付最小 2 乗推定量で置き換えた場合の予測量，第 3 は差分パラメータ以外のパラメータを推定し，差分パラメータ $d$ だけは適当な数値を代入した予測量である．目的は，これら 3 つの予測量のよさを相互比較することである．そのために，予測の平均 2 乗誤差 （PMSE） を計算しているが，厳密な値の導出の困難さから，大標本のもとでの PMSE を漸近展開の方法で導出している．

本章で得られた主要な結果は次の通りである．まず，理論的な問題として，漸近的な PMSE を評価するためには，分布収束ではなく，モーメント収束が問題になる．第 2 節では，そのための十分条件を導出し，モーメント収束を保証している．その上で，第 3 節では，3 つの予測量の漸近的な PMSE を導出している．ただし，第 3 の予測量を構成するに際しては，差分パラメータの値として，真の値との差を $c/\sqrt{n}$，ただし，$n$ は標本サイズ，$c$ は任意の定数，と想定した．その結果，第 2 の予測量との優劣は，$|c|$ の値，および第 2 の予測量を構成する際に使った $d$ の推定量 $\hat{d}$ の標準誤差の大きさに依存して，必ずしも一方向ではないことが示された．

以上の結果は，第 4 節において，非定常な次のモデル

$$(1-L^s)^{m+d}\,x_t = u_t \tag{5}$$

に対して拡張されている．ここで，$m$ は自然数である．この場合にも，上記と同様の 3 つの予測量を定義して，漸近的な PMSE を導出している．ただし，第 3 の予測量については， $m$ を既知として，$d = c/\sqrt{n}$ の状況を想定している．このとき，第 2 と第 3 の予測量の優劣について，(4) のモデルの予測の場合と同様の結果を得ている．この節の理論的な結果は，第 5 節において，シミュレーション実験により，その妥当性が検証されている．

本論文では，多くの理論的な結果が定理として得られているが，それらの証明は，Appendix において，細部にわたり厳密に証明されている．これらは，先行研究の結果を引用した部分もあるが，多くは片山氏が独自に論証を試みたものである．

**評価**

以上，本論文の概略について述べてきたが，本論文の内容は，すでに日本統計学会や複数の研究集会において報告されており，国際的な専門雑誌に発表可能な成果であるものと評価できる．特に，第 2 章と第 3 章は，それぞれが単独の論文として発表できる内容となっている．ただし，本論文では，例えば，平均のパラメータの推測問題，あるいは，レベルの変化の問題，さらに，構造変化が加わった場合の推測問題など，経済学的にも示唆に富んだ問題については議論されていないので，片山氏がこれらの問題を今後の研究課題として追究されることを期待したい．しかし，学位請求論文は，片山氏がすでに独立した研究者として学術専門誌に発表しうる水準の論文を書く能力を十分に有していることを明白に示している．したがって，審査員一同は，所定の試験結果と以上の論文評価に基づき，片山直也氏に一橋大学博士（経済学）の学位を授与することが適当と判断する．

2004 年 2 月 18 日

審査員

川崎　秀二
桑名　陽一
田中　勝人
矢島　美寛
山本　拓