2005 年 3 月 9 日

一橋大学大学院経済学研究科博士学位請求論文審査報告

佐柄信純氏の博士学位請求論“Optimality of Intertemporal Choice with an Infinite Horizon: Existence, Sensitivity, and Statistical Inference”は無限期間モデルにおける最適経済成長に関する研究である。論文は２部・４章から構成され、前半の第Ｉ部は不確実性が無い完全予見の場合の決定論的理論についての研究であり、第Ⅱ部は不確実性が存在する場合の確率論的理論についての研究である。

第１章“Optimal Growth with Recursive Utility: An Existence Result without Convexity Assumptions”は無限期間連続時間モデルにおける最適成長経路の存在についての研究である。考察される経済では、社会厚生は時間選好率が成長経路に依存する逐次的効用として表現され、最大化すべき目的関数は時間選好率が一定であるときの分離加法的な目的関数を一般化したものである。逐次的効用と分離加法的効用との著しい違いは、瞬時的効用関数が凹関数であっても目的関数が必ずしも凹性の条件を満たさないことである。佐柄氏の研究の目的は、目的関数に凹性がない場合にも適用できる最適経路の存在定理を証明することである。

既存の存在定理には、逐次的効用の凹性を仮定した場合の定理、あるいは瞬時的効用が成長経路の最高階導関数に対応する変数の凹関数であることを仮定した場合の定理があるが、いずれも逐次的効用の一般的ケースには直接に適用することはできない。非凹性は位相の選択の問題とも関係しており、弱位相の意味で目的関数が上半連続であることと、被積分関数が凹関数であることとが同値であることが知られている。したがって、非凹性がある場合には弱位相を用いることは原理的に不可能である。また、使用する位相が強ければ目的関数の連続性を保証することが容易であり、逆に弱ければ実行可能経路の集合のコンパクト性を保証することが容易となる。これらのことから佐柄氏は逐次的効用のケースに「加重付けられた Sobolev 空間」のノルム位相を使うことを提唱している。Sobolev 空間を用いた存在定理には、加法的効用モデルにおいて非凸環境下での存在定理があるが、佐柄氏の結果はその拡張となっている。この章では Sobolev 空間のノルム位相について目的関数の連続性と実行可能経路の集合のコンパクト性が成り立つための条件が示される。

この章の議論をまとめると以下のようになる。実行可能経路は Sobolev 空間の

要素に限定される。逐次的効用の瞬時的効用に関しては成長理論において標準的な条件である「成長条件(P-2)」が仮定される。また、時間選好率に関しては有界性の条件(P-4)が仮定される。他方、実行可能経路は Sobolev 空間の要素とし、非有界な実行可能経路を許容するが、生産技術に有界性の条件（T-3)を仮定することによって実行可能経路の成長率を制約する。以上の前提のもとで、目的関数の Sobolev 空間のノルム位相についての連続性が証明される（Lemma 1.3.1)。所与の初期資本量から出発する実行可能経路の集合がノルム-有界かつノルム-閉であることが証明される(Lemma 1.3.2)。さらにそれがノルム-コンパクトであるが証明される（Lemma 1.3.3)。これらの結果から Weierstrass の定理を適用することによって、最適経路が存在するが証明される。

生産技術が収穫逓増的である場合には非有界な実行可能経路が出てくるが、この章では、非有界な経路であっても成長率が無限に発散しないように生産技術に条件を課すことによって、実行可能経路の集合のコンパクト性を保証している。他方、生産技術の凸性や効用関数の凹性を仮定することなく効用関数の連続性を保証している。このことから、佐柄氏の存在定理は種々の非凸経済モデルに応用することが可能な定理である。

第２章“Sensitivity Analysis on the Stationary States in Optimal Growth: A Differentiable Approach”は離散時間最適成長モデルの定常状態に関する感応性分析、あるいは数学の言葉では安定性分析が主題である。特に割引率と効用関数に摂動を加えた場合の定常状態の変化を考察する。使われる数学的手法は一般均衡理論において正則経済の分析に適用された微分位相の手法である。

経済モデルは準定常的モデルであり、各期の効用関数は時間を通じて同一とし、将来効用は一定の率で割り引かれる。また、生産技術も時間を通じて不変であるとされる。基本的な数学的仮定として、生産技術の凸性と連続性、および効用関数の２階連続的微分可能性が仮定される。また、政策関数の 1 階連続的微分可能性を保証するために、効用関数の凹性とその２階微分の有界性について、既存の研究よって示された条件が仮定される。また、最適経路は内点解であることも仮定される。

定常状態は政策関数の不動点として表され、非退化不動点となる定常状態を正則定常状態と定義される（Definition 2.3.1)。さらに効用関数の 2 階微分と政策関数の２階微分についてある種の非退化の条件が仮定される（Assumption 2.3.1)。これらの条件のもとで、定常状態が正則であることの必要十分条件がオイラー方程式を使って表現される（Lemma 2.3.2)。続いて、割引率とそれに対応する定常状態の組み合わせである定常均衡の概念を導入する。定常均衡から割引率の集合への射影を考え、その正則値を正則な定常経済、その臨界値を臨界

な定常経済と定義し（Definition2.3.2）、定常状態がある割引率のもとで正則であるための必要十分条件は、その割引率のもとで経済が正則であることが証明される（Theorem 2.3.2）。これらの準備のもとに、Sard の定理を適用して、定常状態が正則となる割引率の集合は Lebesgue 測度が 1 であり、稠密であることが証明される（Theorem2.3.4）。これは正則な定常経済が、上記の摂動に関してある意味頑健であることを意味するものである。

さらに、オイラー差分方程式を線形近似し、その特性方程式を用いて非退化定常均衡を定義し（Definition 2.3.3）、定常均衡が非退化であるための必要十分条件がその定常状態が正則定常状態であることが証明される（Theorem 2.3.5）。

最後に効用関数の摂動も含め、前節でまでに示した仮定を満たす効用関数の空間を考え、割引率と効用関数の両方の摂動によって経済が変わる状況を考察する。このとき、割引率と効用関数の直積空間の開かつ稠密な部分集合が存在し、それに属するすべての割引率と効用関数に対応した経済における定常状態は正則であることが証明される（Theorem 2.3.6）。すなわち、割引率と効用関数の摂動について正則定常均衡が一般生成的であることが論証されている。そして、最後に生産技術の摂動についても同様の定理が成立する可能性についても言及している。

以上が第 2 章の概要である。その内容は極めて数学的で設定が簡明であり、結果が明瞭であるという特徴を有する。その理由は、考察すべき問題に対して、確固とした数学的枠組みを持ち、完成度の高い一般均衡理論における正則経済の理論を、離散時間最適成長モデルの定常状態に関する感応性分析に手際よく応用していることにある。一見、経済学への応用の意識がいくぶん希薄となっている印象も与えかねないが、それは佐柄氏が上記定理の前提とした諸仮定について必ずしも懇切丁寧な説明を加えなかった点にあろう。しかし、これらの諸前提についてはこの分野の研究者の間ではよく知られた前提であり、著者の力量への疑問を呈するものではない。

第 3 章“Nonparametric Maximum Likelihood Estimation of Probability Measures: Existence and Consistency”は統計的推定法である最尤推定法についての研究であり、ノンパラメトリックな確率測度族に対し最尤推定法を定式化し、最尤推定量の一致性を一般化している。一般化のポイントは、確率過程の独立性の仮定を外し、定常性とエルゴード性の仮定に置き換えたことである。これまでの一致性の証明においては確率過程の独立性の下での大数の強法則の適用が本質的な役割を果たしているが、この章の証明においては，Birkhoff のエルゴード定理とマルチンゲール収束定理が用いられている。

問題の設定とモデルの概要は以下の通りである。確率空間，観察値の集合，

確率過程の組合せを確率モデルとして定義し、真の確率測度を未知とし、確率測度の集合の部分集合を推定集合とする。与えられた確率モデルと密度関数によって表現可能な推定集合に対し、観察されるデータの尤度を最大化する確率測度が最尤推定量である。確率過程が真の確率測度の下で定常性とエルゴード性を満たすとき、確率モデルは標準的であるとし（Definition 3.2.1)、また、与えられた確率モデルと整合的な推定集合は許容可能であるとし（Definition 3.2.2)、標準的な確率モデルとそれに対し許容可能な推定集合について最尤推定法が定式化される。

確率モデルと推定集合は次の条件を満たすことが要求される（Definition 3.2.2)。真の確率測度は推定集合に属する。推定集合はコンパクトである。推定集合は絶対連続性を満たす（密度関数が存在する)。推定集合の下で確率過程は定常性とエルゴード性を満たす。推定集合の下で確率過程の確率分布は真の確率分布とは異なる。以上の仮定のもとで、主要定理（Theorem 3.3.1）では，次のことが主張される。標準的な確率モデルとそれに対し許容可能であり密度関数によって表現可能な推定集合が与えられたとき、尤度最大化問題の解となる確率測度が可測写像として存在し、ほとんどすべての観察データについて、尤度最大化問題の解の系列はデータ数が増えるにつれ、真の確率測度に収束する。

証明は以下のような背理法でなされる。最尤推定量の系列が真の確率測度に収束しないと仮定する。推定集合に属する任意の確率測度は真の確率測度について特異であることが Birkhoff のエルゴード定理を援用して証明される(Lemma 3.5.1)。この事実を考慮し、推定集合に属する確率測度に対応する密度関数と真の確率測度に対応する対応する密度関数から定義される尤度比は、データ数が増えるにつれ、ほとんどすべてのデータについてゼロに収束することがマルチンゲール収束定理より示される(Theorem 3.5.1)。背理法の仮定により、このことはデータ数が十分に大きくなれば、真の確率測度に関するデータの尤度が最大尤度を上回ることになり、矛盾が生じることが示される。

この章の結果は「ペナルティ関数を付加したノンパラメトリックな最尤推定法」に応用可能であり、したがって、「ペナルティ関数を付加した最尤推定量」の存在と一致性を本章の枠組みで証明することができる(Theorem 3.3.3)。さらに、この章で展開されたアプローチは、標準的な枠組みである密度関数のパラメータに関する最尤推定法にも応用することができ、確率過程の独立性と対数尤度関数の可積分性を仮定しないという点で，先行研究よりも一般的な結果が得られている。

第 4 章“Stochastic Growth with a Likelihood-Increasing Estimation Process”は不確実性が存在する場合の成長理論の研究であり、前章で得られた結果を従来の

最適成長の理論に適用し、動学的な意思決定問題として成長理論を再構築している。多くの既存研究では、経済の計画者が将来の技術や選好の真の分布を知っていることが仮定されている。それとは異なり、この章で考察される経済の計画者は真の分布を必ずしも知らず、過去のデータを観察することによって真の分布を推定し、その推定に基づいて計画を立てる。このような動学的意思決定問題の研究としてはベイズ的推定に関する研究など幾つかの研究があるが、それらの研究とは異なり、佐柄氏は尤度増大的推定と呼ばれる別の手法を採用している。

この章の議論の概要は以下の通りである。最初に、確率モデルとして、自然の状態の確率分布を表す確率空間と計画者が観察できる標本空間が与えられ、確率空間から標本空間への写像として確率プロセスが定義される。計画者は確率空間の真の確率測度を知らず、真の分布が存在し得る範囲を表す推定集合の中の要素を、真の分布の推定として、選択する。ただし、その推定は標本空間上の密度関数として表現できるものとされる。尤度増大的推定量は、過去の標本と前期に推定した確率分布に依存して、今期の推定として、その標本の確率密度が減少しないように確率分布を対応させる写像である。尤度増大的推定量の重要な特徴は前期の推定に依存することであり、そのことからより一般的な推定プロセスとなっている。

経済成長モデルとしては一般的な資本蓄積の無限期間モデルが使われている。経済の計画者は真の確率測度と実際に実現している自然の状態を知らない。計画者は自己の推定に基づいて生産技術を選択できることが仮定されているが、効用関数は状態だけに依存することが仮定される。計画者は毎期に、過去に観察した標本と前期の推定に基づき尤度増大的推定方法によって新たに確率分布の推定を行い、その期以降の期待効用が最大になるように投資計画を決定する。

計画者は確率分布の推定、その期の資本量、および過去の標本に依存して次期の資本量を選択する。したがって、実行可能な計画は、初期の推定分布と資本量から始まり、観察される標本列に対して尤度増大的推定法よって推定される分布と技術的に実現可能な資本量の点列として表現される。そのような実行可能な計画のなかで推定した確率分布に基づいて計算された期待効用を最大にするものが最適計画である。この場合、計画者の行動には標本観察による習得の過程が含まれており、計画者は主観確率に基づいて計画を立てている。

確率過程に関する仮定として、真の確率分布についての定常性とエルゴード性が前提とされる。また、推定集合の性質として、それが真の確率分布を含むこと、それがコンパクトであること、そのすべての要素はある測度について絶対連続であること、そのすべての要素について確率過程が定常的かつエルゴード的であること、そのすべての要素は確率過程のある期において真の分布とは

異なることが仮定される。経済モデルについての仮定として、効用関数および生産技術の資本量に関しての連続性と有界性が仮定される。また、真の確率分布を知ることは計画者にとってより有利であることが仮定される。これらの仮定のもとに、最適計画が存在し、その計画において推定される確率分布の列は真の確率分布に（全変動ノルムの意味で）収束することが証明される（Theorem 4.3.1）。

以上が第４章の概要であるが、その内容には尤度増大的推定の手法を適用したことなど佐柄氏独自のものが含まれており、新しい結果が得られている。また、議論で使われた経済モデルは不確実性が存在する経済モデルとしても基本的に既存のモデルの一般化になっており、応用化可能性も極めて高く、最適成長理論における重要な基本文献と見なすことができる。

以上において佐柄氏の博士論文の概要および彼独自の貢献について説明した。論文全体として第Ｉ部と第Ⅱ部では、第Ⅱ部の方がより現実の問題として興味深い内容であり、著者としても力を入れている領域である。第Ｉ部は著者の力量を示す実例と考えてしかるべきであろうし、実際にその実力は十分に発揮されている。また、各章の内容にはこの分野における最先端の成果が含まれている。実際、その内容は既に学会においても高い評価を受けており、第１章は *Journal of Optimization Theory and Applications* に掲載されており、第３章と第４章はそれぞれ *Journal of Statistical Planning and Inference* と *Economic Theory* に掲載されることが決まっている。

以上のことから、我々審査員一同は佐柄信純氏の博士学位請求論文“Optimality of Intertemporal Choice with an Infinite Horizon: Existence, Sensitivity, and Statistical Inference”が一橋大学博士学位（経済学）に十分に値すると判断する。

審査員
浅子和美
石村直之
桑名陽一
武隈愼一
山崎　昭