一橋大学経済学研究科博士学位申請論文要旨
佐柄信純
『Optimality of Intertemporal Choice with an Infinite Horizon: Existence, Sensitivity, and Statistical Inference』

本論文は無限期間における動学的意思決定に関する理論的問題を，最適経路の存在，定常状態の感応性分析，統計的推論の３つの観点から考察したものである．本論文は決定論的意思決定問題を扱う第Ｉ部と確率論的意思決定問題を扱う第Ⅱ部からなり，各部はそれぞれ２つの章で構成される．本論文の内容は以下の通りである．

第１章では，連続時間最適成長モデルにおける最適成長経路の存在問題が議論される．Koopmans (1960) によって提唱され，Epstein (1987a, b) や Uzawa (1968) らによって一般化された逐次的効用 (recursive utility) は時間選好率が資本蓄積経路に依存するよう内生化されており，近年，その重要性が再認識されている．時間選好率が一定である加法分離的効用 (time additive separable utility) においては，瞬時的効用が凹関数であれば，効用関数も凹関数になるが，逐次的効用の場合は，さらに割引関数の部分に強い仮定を置かなければ，一般には凹関数にはならない．Becker, Boyd, and Sung (1989) は逐次的効用が凹関数であるという仮定の下で，凸環境において最適成長経路の存在を証明した．しかし，割引関数の部分にどのような仮定を置くのが経済学的にもっともらしいかについては，研究者の間にコンセンサスがなく，理論的には，逐次的効用に非凹関数をも許容するのが自然な要請である．

この点を考慮した非凸環境における存在定理が望まれるが，実は，加法分離的効用のケースですら，このような拡張は多大な困難を極める．最適制御理論においては，プログラム空間の弱位相で目的関数が上半連続であることは，被

積分関数が凹関数であることと同値であることが知られており (Marcellini (1990))，効用関数の弱位相に関する連続性と非凹性とは原理的に両立しないからである．

加法的効用モデルにおいて，Romer (1986) は資本蓄積経路の２階導関数に依存する効用関数を考察し，瞬時的効用が２階導関数に対応する変数の凹関数ならば，効用関数がプログラム空間の弱位相で上半連続になる事実を利用して，最適経路が存在することを証明した．通常の瞬時的効用は資本蓄積経路の２階導関数に対応する変数には依存しないが，これは瞬時的効用が２階導関数に対応する変数の凹関数である場合の特殊ケースである．したがって，Romer の存在定理は，応用の上では，収穫逓増を含むかなり広いクラスの非凸問題を取り扱えることになる．しかし，残念ながら，Romer の巧妙なアイディアを直接，逐次的効用モデルに適用することは難しいものと思われる．

本章では，このような技術的難点を踏まえ，Chichilnisky (1977) によって導入された「加重付けられた Sobolev 空間」にノルム位相を導入することにより，逐次的効用をともなう最適成長モデルにおける最適経路の存在を非凸環境で証明し，加法的効用モデルにおける Chichilnisky の非凸環境下での存在証明をさらに拡張した．

Sobolev 空間は最適制御理論において多用されるが，無限次元ベクトル空間の中では比較的取り扱い易い性質を持つ Hilbert 空間の１つである．加法的効用モデルにおいて，Maruyama (1981) は加重付けられた Sobolev 空間に弱位相を導入し，凸環境の下で最適経路の存在を示した．これらの先行研究から明らかなように，プログラム空間として Sobolev 空間を採用した場合には，最適経路の存在を証明する際に，ノルム位相と弱位相の２つの位相を導入することができる．一般に，位相を強くすれば，効用関数の連続性を証明するのは容易になるが，実行可能経路集合のコンパクト性を証明するのは難しくなる．位相の選択に際しては連続性とコンパクト性の間にトレードオフがともなうのである．

また，生産技術の凸性を外すと収穫逓増が出現するため，無限に発散する資本蓄積経路が実行可能になり，最適経路が存在する保証は必ずしもない．本章では，非有界な実行可能経路を許容するが，資本蓄積の成長率が無限に発散しないようなプログラム空間を導入することにより，実行可能経路集合のコンパクト性を保証するために生産技術には既存の結果よりも強い有界性を課すものの，効用関数の連続性の証明には，生産技術の凸性や効用関数の凹性は一切用いられない．本章で得られた結果は，Davidson and Harris (1981) や Skiba (1978) で扱われる非凸経済モデルにも応用可能である．

第２章では，離散時間最適成長モデルにおける定常状態の感応性分析を扱う．最適成長モデルにおいては，効用関数，割引率，人口成長率，技術進歩率，資本税

率などの経済を描写する所与のパラメータに対し，定常状態が連続濃度（非加算無限個）で存在すると，パラメータの変化に対し，定常状態がどのように変化するかを分析する際には，技術的困難がともなう．ある臨界水準でパラメータに僅かな微少変化が起こると，定常状態がドラスティックに変動する不連続性が発生するからである．長期均衡である定常状態にこのような不連続現象が発生することは，理論的には排除できないにせよ，長期の経済変動がすべてこのような不連続現象によって引き起こされるとは考えにくい．微少なパラメータ変化に対し，定常状態が滑らかに変化するための条件を考察することには十分に意味があり，また応用分野においても重要であると思われる．

本章では，Debreu (1972) を嚆矢とする一般均衡理論で展開された正則経済（regular economy）の概念を援用して定常状態を分類し，その性質を明らかにする．最初に割引率に摂動を加えたときの定常状態への効果を，次に割引率と効用関数に同時に摂動を加えたときの定常状態への効果を分析する．

政策関数（policy function）の非退化不動点を**正則定常状態**（regular stationary state），政策関数の退化不動点を**臨界定常状態**（critical stationary state）として定義し（Definition 2.3.1），定常状態で成立する Euler 方程式との関係が述べられる（Lemma 2.3.1）．次に，与えられた割引率とそれに対応する定常状態の組み合わせである**定常均衡**（stationary equilibrium）から割引率の集合への射影を考え，その射影の正則値（regular value）を**正則定常経済**（regular stationary economy），その臨界値（critical value）を**臨界定常経済**（critical stationary economy）として定義し（Definition 2.3.2），正則定常状態と正則定常経済との関係，臨界定常状態と臨界定常経済との関係が特徴付けられる（Theorem 2.3.2）．

これらの分析を踏まえ，臨界定常経済の集合は Lebesgue 測度がゼロであり，正則定常経済の集合は稠密であることが示される（Theorem 2.3.4）．これは次のことを意味する．

- 臨界定常状態を出現させる割引率の集合は $(0,1)$ 区間においてほとんど無視できる．
- ほとんどすべての割引率について定常状態は局所的に有限個であり，割引率の微少変化に対し，定常状態は滑らかに依存する．

また，定常状態で評価された Euler 方程式によって導出される特性方程式の根と定常状態との関係が特徴付けられる（Theorem 2.3.5）．

上で示した定常状態の局所的有限性は，効用関数に摂動を加えても成立する．厳密に言えば，正則定常状態を出現させる割引率と効用関数の組み合わせの集合は，経済の空間の中で開集合であり，稠密である（Theorem 2.3.6）．これは次のことを意味する．

- ある割引率と効用関数の組み合わせの下で定常状態が正則（局所有限）なら

ば，その割引率と効用関数に小さな摂動を加えても，依然として定常状態は正則である．

- 定常状態が臨界的であったとしても，割引率と効用関数にほんの僅かな摂動を加えることによって，定常状態を正則にさせることができる．

本章で得られた結果は連続時間モデルにおける Magill amd Scheinkman (1977) の結果とも符合する．Magill and Scheinkman は効用関数の2階導関数の対称性を仮定し，パラメータ化された効用関数の族に摂動を加えているが，本章では，効用関数の2階導関数の対称性は仮定せず，摂動を加える効用関数の族はパラメータ化されていない効用関数をも含む点で一般化が図られている．

第３章では，不確実性下の動学的意思決定問題として，未知の確率分布を観察されるデータから推論する方法の１つである最尤推定法（maximum likelihood estimation method）を分析する．平均や分散，あるいはさらに高次のモーメントなどの密度関数を特徴付けるパラメータが未知であるとき，観察されるデータに最も高い尤度を与えるような密度関数のパラメータを推定量として採用するのが最尤推定法である．最尤推定量は，観察されるデータが増えるにつれ，真のパラメータに収束していくという一致性（consistency）を持ち，統計学で最も重要な推定量の1つである．

本章では，通常，密度関数のパラメータの推定問題として定式化される最尤推定法を密度関数によって表現可能なノンパラメトリックな確率測度の族に対して定式化し，一般的な条件の下で最尤推定量の存在を示した上で，確率測度の全変動 (total variation) による収束概念にもとづき，最尤推定量の一致性を証明した（Theorem 3.3.1）．

証明の一般化のポイントは次の2つである．第1に，確率過程の独立性を外し，それを確率過程の定常性とエルゴード性に置き換えた．最尤推定量の一致性の厳密な証明は Wald (1949) によって初めて与えられたが，既存の証明においては，確率変数の独立性が仮定され，大数の強法則の適用が依然として本質的な役割を果たしている（例えば， Hess (1996) を見よ）．本章の証明では，Birkhoff のエルゴード定理とマルチンゲール収束定理を援用した．第2に，本章では，コンパクトな確率測度の族に推定問題を限定することにより，Wald 以降，常に問題視されているものの，今だに既存の証明で課されている「対数尤度関数の可積分性」（例えば，Dong and Wets (2000), Choriat, Hess, and Seri (2003), Hess (1996) を見よ）を直接的に利用しない証明を与えたことである．本章で展開されたアプローチにより，既存の証明における密度関数に関する技術的仮定は，すべてノンパラメトリックな確率測度の族によって体系的に表現されることになる．

本章のアプローチのように，密度関数によって表現可能なノンパラメトリックな確率測度の族を最尤推定法に導入するのは標準的な設定とは大きく異なる．本章のアプローチのメリットは，一致性の結果を de Montricher, Tapia, and Thompson (1975), Dong and Wets (2000), Good and Gaskin (1971) らによって示された「ペナルティ項を付加したノンパラメトリック最尤推定法」(nonparametric maximum penalized likelihood) にも応用できるだけでなく (Sectioin 3.3.2), 密度関数のパラメータを推定する標準的な設定にも応用できる点にある (Sectioin 3.3.3).

また, 本章の結果を nonparametric な密度関数の最尤推定法に応用する場合, 推定する密度関数の族が L^1-ノルムでコンパクトである必要がある. 任意の標本空間上で定義された密度関数の族が L^1-ノルムでコンパクトであることをチェックするのは, 必ずしも容易なことではないが, 本章では, ユークリッド空間上で定義された密度関数の族の L^1-ノルムにおけるコンパクト性を完全に特徴付け, 具体的に密度関数の族が与えられたときに, L^1-ノルムでのコンパクト性を簡単にチェックできる条件を提示した (Theorem 3.3.4).

第 4 章では, 前章で展開された統計的推論による異時点間の意思決定問題を, 最適成長論の枠組みで動学的に整合的な意思決定問題として再構築することを試みる. Brock and Mirman (1972) の先駆的な論文以来, 不確実性下の最適成長モデルは長い間研究されてきた. 既存の研究で明らかにされているのは, 最適経路とランダム・ショックの系列は定常的 Markov 過程に従い, その分布の系列は不変分布に収束し, 決定論的最適成長モデルの自然な一般化として, ターンパイク性が示されることである. 不確実性下の最適成長モデルの多くは, 客観的確率分布が意思決定者にとって既知であることを前提にしているが, これはかなり強い要請である. 確率分布が意思決定者にとって未知である場合, 意思決定者は観察されるデータから真の確率分布を推論し, 異時点間の意思決定に利用する必要に迫られる.

Easley and Kiefer (1988) は未知の確率分布をともなう確率論的ダイナミック・プログラミングの枠組みで Bayes 的推論プロセスを定式化し, Bayes 推定量が真のパラメータに収束することを示した. これに対し, 本章では, 意思決定者の尤度原理にもとづく推論プロセスを確率論的成長モデルに明示的に導入し, その漸近的性質を分析する.

本章で考察する経済の構造は次の通りである. 社会の選好と生産技術はランダム・ショックに晒され, 真の確率分布は社会にとって未知であるものとする. 利用可能な情報はエルゴード性と定常性を満たす確率過程によって生成される観察データのみである. 意思決定者は過去のデータの系列を観察しながら, 最適経路を決定するために真の確率分布を予想しなければならない. 推論プロセスは観察データの尤度を考慮して改訂される. 意思決定者は各期ごとに前期に予想した確率分布よりも観察データに高い尤度を与えるような確率分布を新たな予想として採用する. すなわち, 意思決定者は真の確率分布の候補として, 前期に選んだ確率分布よりもデータが生じ易いような確率分布を予想する. こ

のような推定を**尤度増大的推定**（likelihood-increasing estimation）と呼ぶ．各期において，意思決定者は割引将来効用和の期待値を最大化するように，次期の資本蓄積と**尤度増大的推定量**（likelihood-increasing estimate）を選択する．このような意思決定を無限期間に渡って行うものとする．

尤度増大的推定は，前章のように観察データに最大尤度を与える確率分布を選択するという基準よりは遙かに弱く，意思決定者の合理性や推論能力に何らかの制約がある場合には，もっともらしい推定方法であると考えられる．しかし，尤度増大的推定量は今期に新たな観察データが付け加わったとき，データが生成される尤度が前期よりも改善されるような推定量であるから，推定量のクラスとしてはかなり広く，一般的には，前章で分析したような一致性は必ずしも成立しない．

本章では，最適経路の存在を示した上で，もし，意思決定者に真の確率分布を知るインセンティブがあるならば（TP-6），尤度増大的推定量の系列は，それが意思決定者の動学的な意思決定における最適予想である限り，観察データが増えると，真の確率分布に収束することが証明される（Theorem 4.3.1）．この結果を示すために，前章で展開された最尤推定量の一致性の証明方法と Bellman の最適性原理が有効に活用される．