博士学位請求論文審査報告

山口 圭子

「金融データの長期記憶モデルによる分析」

はじめに

本論文は，リスク管理や金融派生商品の価格付けにおいて重要な役割を演ずるボラティリティの時系列的変動を，近年注目を浴びている長期記憶過程の理論を使って実証分析したものである．ボラティリティは直接に観測可能ではないので，いかに推定するかということが問題になるが，従来は，そのためのモデルとして，ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) モデルや SV (Stochastic Volatility) モデルが考えられてきた．しかし，近年，高頻度データが利用可能となり，そのようなデータから計算される RV (Realized Volatility) が，モデルに依存しない精度のよい推定量であるとして注目を集めている．ボラティリティには，RV の他にも，オプション価格から計算される IV (Implied Volatility) があるが，IV の算出においては満期まで一定の値を取るものと仮定されるので，ボラティリティが変動する状況では，バイアスが生じる．そのような場合を考慮した推定量としては，MFIV (Model-free IV) がある．本論文では，これらのボラティリティをいかにして計算するか，そしてまた，それらの長期記憶性がどの程度あるのか，という点に問題意識をもって書かれている．本論文は全部で 5 つの章から構成されている．章の構成は，次の通りである．

第 1 章	序章
第 2 章	長期記憶過程におけるノイズの有無の検定
第 3 章	日経 225 株価指数インプライドボラティリティの計算方法に関して
第 4 章	日経 225 株価指数インプライドボラティリティの情報量 ～“Realized Volatility”予測の観点から～
第 5 章	フラクショナル共和分モデルによるボラティリティの分析

要旨

第 1 章では，本論文の全体を概観し，総括および要約を与えている．さらに，長期記憶モデルとして，通常のパラメトリック・モデルだけでなく，セミパラメトリック・モデ

ルが周波数領域の観点から説明されている．すなわち，長期記憶過程 $\{X_t\}$ のスペクトル密度関数 $f_X(\lambda)$ は，原点の近傍で，

$$f_X(\lambda) \sim G_X|\lambda|^{-2d} \qquad (\lambda \to 0)$$

のように表されるものと仮定される．ここで，G_X は正の定数であり，d は，フラクショナル差分の値 $(0 < d < 1/2)$ である．そして，このようなセミパラメトリックモデルを使う必要性や推定問題における長所が考察されている．さらに，セミパラメトリック・モデルを推定する場合の自然な方法として，周波数領域における推定法を用いることの利点が述べられている．

第2章では，長期記憶過程に従う時系列にノイズが含まれるかどうかの検定問題を扱っている．先行研究としては，Sun-Phillips (2003) が対数回帰モデルに基づいたワルド検定を提案しているが，本論文では，セミパラメトリックな枠組みで，ラグランジュ乗数検定を提案している．それは，統計量

$$LM = \frac{\sum_{k=1}^{m}\left\{\omega_k^{2\hat{d}} - \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\omega_l^{2\hat{d}}\right\}\omega_k^{2\hat{d}} I_{X,k}}{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\omega_k^{2\hat{d}} I_{X,k}} \Bigg/ \left(\frac{m\omega_m^{4\hat{d}}16\hat{d}^4}{(1+2\hat{d})^4(1+4\hat{d})}\right)^{1/2}$$

の値が大きいときに，ノイズが存在しないという帰無仮説を棄却する検定である．ここで，$\omega_k = 2\pi k/n$ は周波数，n は標本サイズ，$m = n^{\alpha}$ はバンド幅 (α は 1 未満の正数)，$\hat{d}$ は差分パラメータ d の推定量である．また，$I_{X,k}$ は観測値 $X_1, \cdots, X_n$ のピリオドグラムであり，

$$I_{X,k} = \frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{t=1}^{n} X_t e^{it\omega_k}\right|^2, \qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{n}$$

で定義される．この検定は，ボラティリティの推定量である RV のノイズの有無に適用される．RV は，日中リターン系列の 2 乗和で定義されるが，時間間隔を 0 に近づけることにより真のボラティリティに収束すると考えられるが，実際に 0 に近づけることは不可能である．ここでは，日経 225 株価指数の 5 分間隔と 1 分間隔のデータそれぞれを用いて計算した RV に対して，この検定が適用され，1 分ごとのリターンに基づく RV の方が，5 分間隔の RV よりもノイズを含むという結論が得られた．このことは，時間間隔が短いほど，RV がマイクロストラクチャー・ノイズの影響を受けやすいという事実と整合的である．なお，本章では，シミュレーションにより，Sun-Phillips (2003) の検定方式と，ここで提案された検定方式が比較されており，提案された方式の検出力のよさが示されている．また，検定のサイズに関する distortion についても，前者ほどではないという結果が得られた．

第3章は，IV の計算方法が論じられている．オプションの理論価格を導出する際に広く用いられる BS (Black-Sholes) モデルでは，ボラティリティを満期まで一定であると仮

定するので，ボラティリティが変動する場合には，BS モデルに基づいて計算された IV には，バイアスが生じることになる．そこで，原資産のボラティリティが変動しても定義可能な IV が必要となり，そのために MFIV が提案された．MFIV は，理論的には，市場における権利行使価格の連続性を仮定して定義されるが，現実に市場で取引される権利行使価格の数は限られているので，近似計算が必要となる．代表的な方法としては，シカゴオプション取引所で採用されている計算法 VIX (Volatility Index) と，Jiang-Tian (2005, 2007) が提案した計算法 JT がある．Jiang-Tian は，VIX の方法は近似誤差が大きいことをシミュレーション実験により指摘して，スプライン関数を使った方法を提案した．本章では，これらの計算方法の説明の後，日経 225 株価指数オプション価格から，それぞれの方法による MFIV の値が実際に計算されている．その結果，VIX よりも JT の方が，標準偏差が大きく，最大値はより大きく，最小値はより小さくなることを確認した．なお，それぞれの方法で得られた MFIV の系列は，強い自己相関をもっており，長期記憶的と考えられるが，この点の議論は第 5 章で展開される．

第 4 章は，RV の予測問題を論じている．IV は，現在から満期までの投資家の予測を表していると考えられるので，将来の RV に関して，過去や現在の RV と異なる情報を有している可能性がある．先行研究では S&P500 指数の RV の予測を GARCH モデルや SV モデルなどで行う際に，Black-Sholes 理論に基づく IV を説明変数として加えた場合の予測精度が調べられている．また，渡部・山口 (2006) においては，日経 225 株価指数の RV の予測を，ARFIMA モデルに IV を変数として追加した場合について調べているが，ここでは，第 3 章で計算した MFIV を使った予測が行われている．RV としては，5 分ごとのリターンが使われており，1 期先の予測パフォーマンスが比較されている．その結果，MFIV を使った予測は，IV を使う場合よりも，予測の平均 2 乗誤差を小さくすること，VIX よりも JT の方法による MFIV の方がよりよい予測を与えるという事実が見出された．

第 5 章は，共和分関係の観点から，RV と MFIV が議論されている．具体的には，それぞれを対数変換した後に，前者を後者に回帰したセミパラメトリックな回帰モデルに関して，統計的な推測をしている．統計的な問題としては，例えば，IV が RV を不偏予測していれば，定数項は 0，傾きは 1 となる検定が考えられる．先行研究においては，回帰係数は 1 より小さいという結論が得られている．その理由としては，IV として使われているのが BS 理論に基づくものであり，ボラティリティが変動する場合には，その影響が出ていると考えられる．別の理由としては，リスク・プレミアムの存在や長期記憶性が挙げられる．このことを踏まえて，本章では，定常フラクショナルな共和分セミパラメトリック・モデルによる分析がなされている．モデルを推定する方法としては，Robinson (1994) が提唱した NBLS (Narrow-Band Least Squares) 推定と，Nielsen (2007) が提案

したLW (Local Whittle) 推定が使われる．データは，日経225株価指数のRVとMFIVであり，日本のデータを用いた分析は，本論文が最初である．その結果，先行研究と同様に，回帰係数は有意に0より大きく，1より小さいという分析結果を得た．なお，先行研究では，共和分の存在の有無を検定するという手続きを省略して推定を行っているが，本研究では，共和分検定を行って共和分の存在を確認した上で，モデルが推定されている．分析結果からは，共和分関係は，長期的な関係をみていることから，IVはRVに対して情報を含んでいるが，不偏ではなく，長期的にもリスク・プレミアムの影響が示唆される．さらに，ここで使われているフラクショナル共和分モデルでは，説明変数と誤差項に相関があっても一致性は保証されるが，高次のバイアスが発生する．Robinson (2007)では，高次のバイアスを消去するような推定方法が提案されているが，その方法は説明変数と誤差項の相関がなければ適用不可能である．そこで，本章では相関の有無に関する検定方法を提案している．

評価

以上，本論文の概略について述べてきたが，第2章から第5章の4つの章における山口さんの貢献を要約すれば，次の通りである．まず，第2章では，長期記憶時系列モデルを含むセミパラメトリック・モデルを用いて，ノイズが含まれるかどうかの検定方式を提案して，その検定の振る舞いをシミュレーション実験で調べ，既存の方式よりも優れていることを示している．そして，実際のデータに適用している．第3章では，MFIVの計算方法として，Jiang-Tianが提案した方法とVIXの方法を取り上げ，それらの統計的性質を分析しつつ，日本のオプション・データに初めて適用している．第4章では，RVをARFIMAモデルを用いて予測する際に，説明変数としてMFIVを追加した場合の予測の精度を調べ，MFIVの中でも，Jiang-Tianの方法により計算されたものがVIXによるものよりも，よりよい予測値を与えることや，BSモデルに基づいて計算されたIVを使うよりも優れていることを見出している．第5章では，日経225株価指数のRVとMFIVに対して，フラクショナル共和分分析を行っており，この点も日本においては初めての研究である．

以上の貢献に対して，学位請求論文において残された研究課題として，山口さんが認識していることを含めて，次のことを挙げておきたい．第2章のノイズの有無の検定においては，シグナルである長期記憶過程の系列がノイズと相関をもつ場合の分析は，どのようになるかということである．この点は，マイクロストラクチャー・ノイズの時間的従属性の問題とともに，興味あると思われる．また，シグナルが非定常な場合の分析も必要となろう．第3章のIVの計算は，本質的には，無限区間の定積分計算の近似問題であるが，近似方法については，既存の方法以外にも，別の方法を検討する余地があるように

思われる．第 4 章の RV の予測においては，1 期先の予測の振る舞いだけを調べているが，一般に h 期先の予測がどうなるかについても調べることは興味あると思われる．第 5 章の RV と MFIV のフラクショナル共和分分析においては，説明変数と誤差項に相関がある場合には，高次の漸近バイアスが生じる点が指摘され，漸近バイアスを消し去る推定法が説明されているが，その方法は相関があることを前提としている．したがって，相関の有無に関する検定が必要となり，山口さんはそのための検定方式を提案しているが，この検定については，なお検討の余地がある．実行可能性も含めて，さらに議論を深めることが望ましい．ボラティリティの変動を長期記憶性の観点から研究することは，ファイナンスの分野における実証研究として，経済学的にも注目されるものである．上で指摘した課題をはじめとして，山口さんがこの分野においてこれらの問題を今後の研究課題として追究されることを期待したい．

以上，山口さんの学位請求論文の貢献と今後の期待を込めた要望を述べてきたが，本論文の第 4 章はすでに査読付きの学術誌にアクセプトされ，第 2 章についても査読付きの学術誌に投稿され，改訂中である．このことは，山口さんがすでに独立した研究者として学術専門誌に発表しうる水準の論文を書く能力を十分に有していることを明白に示している．したがって，審査員一同は，所定の試験結果と上記の論文評価に基づき，山口圭子さんに一橋大学博士（経済学）の学位を授与することが適当と判断する．

2008 年 7 月 9 日

審査員

黒住　英司
高橋　一
田中　勝人（審査委員長）
本田　敏雄
渡部　敏明