

博士学位請求論文審査報告書

伊藤有希

“On the Recovery Process Models”

はじめに

近年クレジットリスク計量の重要性は増している。特にバーゼル II 施行のため、貸付債権のクレジットリスクを計量する方法を確立することは金融機関にとっても重要な課題になっており、その際、各企業のデフォルト確率、債券回収率、デフォルト時エクスポージャーの 3 つのパラメータ推定が大きな問題となってきた。本論文ではその中でも、債券回収率推定を取り上げ、デフォルト後の債権回収率のモデル化を 1 企業の場合と 2 企業の場合の双方に関し行っている。元々、データが得にくいことより、これまで研究者の中で余り注目されてこなかった分野で、いわゆるファイナンスの世界における先行研究が少ない分野である。そういった状況の中で本論文は保険数理の分野で研究されてきた手法の応用、そして拡張を行うことによりこの問題に取り組み、解決してきた。また、一般に実世界では回収回数は複数回、未回収債権に対しても利子が付くという事実にも注目し、債権回収モデルを構築・分析したことは先行研究と比べ大きな功績である。

本論文は 4 章と付録より成り、その構成は以下の通りである。

1. Introduction
2. Preliminary: Review of the Method of Numerical Calculations
3. Recovery Process Model for Single Defaulting Company
4. Recovery Process Model for Two Defaulting Companies
- A. Technical Issues

以下各章の内容を章ごとに紹介する。

論文の概要

1. 第1章及び第2章

第1章は、本研究への動機と先行研究のサーベイ、そして本論文で考察するモデルの紹介を1企業と2企業それぞれに対し行っている。第2章は本研究で用いられる数値解析の手法の紹介と解説、又複合ポアソン過程の簡単な解説よりなっている。本章では伊藤氏のオリジナルな結果等の紹介はないが、パンジャー漸化式 (Panjer Recursion Formula) やバーニック漸化式 (Vernic Recursion Formula) といったこれまでファイナンスの世界では用いられなかった手法が丁寧に述べられている。

本論文のメインパートは以下に述べる第3章、4章である。3章、4章共に伊藤・山下(2008)で行われた実証研究より観察された以下のポイントを基礎としてモデル構築が行われていることを先ず明記しておく。

- (1). 未回収債権に対し利息が発生する。
- (2). 同じ債権に複数回の回収が存在する。
- (3). 経験累積回収率の変化率が時間に関して減少関数である。

2. 第3章. 1企業モデル

本章の内容は大きく二つに分けられる。前半部では斉時的な複合ポアソン過程によるモデル、後半部で非斉時的ポアソン過程を用いた分析を行っている。先ず初めに、上記ポイント(1)と(2)に注目し、デフォルトした1企業の債権に関する回収過程を斉時的複合ポアソン過程でモデル化すると同時にデフォルト後にも利子が付き、同じ債権に複数回収が行われることを仮定し、モデル化している。そして、この点が既存研究と大きく異なっているところである。既存研究では複数回の回収を考えていないため、1回ごとの回収と、累積回収を区別できないが、伊藤氏のモデルにおいては累積回収率、回収の増分、初期負債額 (デフォルト時負債額)、時効 (最終回収可能期限)、利子率の関係を分析することができるようになっている。ついでながら本論文ではバーゼルIIで用いられる LGD の推定と、その手順も考察されている。ここでの主要結果は

Theorem 3.3.3 で示されているように残存債権額 M_T の期待値等を数値計算可能な形で提示している：

$$E\{M_T\} = \int_0^{e^{rT_D}} x f_{\tilde{X}_t}(e^{rT_D} - x) dx$$

但し、 $f_{\tilde{X}_t}(x) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} f_{\tilde{X}_t}^{*n}(x)$ は確率変数 $\tilde{X}_t = \exp\{r(T - V_t)\}$ の密度関数の n 回のたたみ込み、 D はデフォルト時負債額、 T は時効日、 r は利率、 V は $(0, t]$ 上の一様分布である。上式の右辺にパンジャー漸化式、または高速フーリエ変換を適用することにより、期待値等の数値計算が可能となる。本章では、これ以外にも、回収率の期待値と分散、また回収達成時点の確率分布と期待値も、同様な数値計算の手法により求めている。さらに、パンジャー漸化式と高速フーリエ変換の計算精度と速度が比較され、計算精度はほぼ同等であるが、計算速度に関しては高速フーリエ変換よりもパンジャー漸化式の方が数段早いことが示されている。

次いで、ポイント(3)に関連し、伊藤氏は上記モデルを非斉時的複合ポアソンモデルに拡張することにより、実際のデータから観察された事実と整合的なモデルを構築した。非斉時的複合ポアソンモデルについては、これまで非斉時的複合ポアソン過程の推移確率の数値計算手法に関する研究が存在しない。このため本章では、非斉時的複合ポアソン過程を区分的に斉時的複合ポアソン過程で近似して各種の数値計算を実行している。また区分近似という本方法の正当性は、区分的斉次過程がオリジナルな非斉次過程に弱収束することが Theorem 3.5.10 で証明されていることにより担保されている。さらに、数値計算法としての本方法の精度はモンテカルロ・シミュレーションと比較され、その精度はモンテカルロ・シミュレーションを用いた場合の 95%信頼区間に入る事が示されている。

最後に、疑似データを用いて各種パラメーターの推定が行われている。回収の増分に関しては打ち切り指数回帰モデル、回収回数はポアソン回帰モデルによってデフォルト前の企業規模や収益率を説明変数としたパラメーター推定がなされている。

3. 第 4 章 2 企業モデル

本章では 2 企業の債権回収過程が 2 変量斉時的ポアソン過程および 2 変量非斉時的ポアソン過程を用いて 2 つの倒産企業に対する債券回収過程がモデル化されている。さらに回収に関しても 1 企業の回収のみに影響を与える個別ショックと 2 つの企業の回収に影響を与える共通ショックを分けることにより 2 種類のショックの存在を仮定している。その際に、ショック時点と回収時点の間には確率的なラグが存在する事を仮定する

ことにより、より現実のデータと整合性を持つよう工夫されている。ただし、それぞれの企業の回収時点は相関を持つが、同時には起こらないという設定でモデルが組み立てられている。一方、前章とは異なり未回収債務に対しては利子が発生しない場合と、発生する場合双方の議論が展開されている。

言うまでもないことだが、非斉時的複合ポアソンモデルでは、1企業への回収回数（カウント過程の周辺分布）は非定数なインテンシティをもつポアソン分布に従い、これは1企業に関する回収過程のモデルと一致する。本章では二つの倒産した企業が抱える債権の回収率の相関、2企業の債権からなる債権ポートフォリオの期待値と分散が数値的に計算されている。これらの特性値の数値計算はバーニック漸化式とモンテカルロ・シミュレーションに基づき行われている。金利がつかないケースでは、バーニック漸化式は2変量複合ポアソン分布の分布関数を計算するには非常に強力な手法であるが、金利がつくケースでは2企業の回収率の増分が金利を通じて相関し、バーニック漸化式は成立しないため、ここではモンテカルロ・シミュレーションが用いられている。モンテカルロ法の場合、ここでも非斉時的2変量複合ポアソン過程に関しては既存研究が存在しないため、如何にして擬似乱数を発生させるかが大きな問題となる。そこで、伊藤氏はここでも新たな計算法を提案している。2企業利付きモデルにおけるモンテカルロ法の精度を確かめる方法は無いため、伊藤氏は先ず、利子が付かないモデルでモンテカルロ・シミュレーションの計算精度をバーニック漸化式による結果と比較し、バーニック漸化式を用いた結果はモンテカルロ・シミュレーションを用いた結果の信頼区間95%以内に入っていることを確かめた。従って、その後で行った2企業利付きモデルにおけるモンテカルロ法の信頼性も高いと考えられる。

最後に、データ上の制約について一言述べておくと、本章で仮定されている2種類のショックは理論的には十分納得できるものであるが、残念ながらデータからそれらの違いを識別することはできない。この点についてはある種の事前情報が必要とされる。

評価と今後の課題

企業倒産モデルにおいて、これまでは一括返済の仮定並びに利子率を加味しない事が大部分であった。本論文の功績の一つであるモデルへの利子の導入によりこの研究分野でこれまで標準的な手法とされてきていた再生理論やモーメント母関数等による確率論的な手法の適用を非常に難しくしている。同時に複数回の回収回数を許容することはこれまでのモデルと比べ数段現実のデータに即応している。この様に、現実の世界により近いモデルを構築したため、上でも述べたように、これまで主流であった数学的・確率

論的なアプローチで本問題を解くことは至難の業であり、多くの場合現在の確率論のレベルでは不可能である。そこで、伊藤有希氏は保険数理の世界で開発された数値解析手法を本問題用に改良し、回収率の期待値と分散、また回収達成時点の確率分布等を正確に求める事に成功した。確率論的手法では非常に難しい問題をこの様な形で解いたことは価値が有り博士学位授与に十分な業績である。倒産データの秘匿性の高さから現実のデータで彼の結果を検証することができなかったのは残念であるが、擬似データによりその有用性も検証されている。2 企業モデルへの理論面からのコメントとしては、負の相関を持つ場合の多変量ポアソン過程の構築、利子が存在する場合にバーニック漸化式を拡張できないか等があるが、それらは将来への課題と考えられる。

以上述べたように本論文は的確な問題意識に裏づけられたモデル構築と、オリジナルな解決法を提示している。ここに、審査および面接の結果を踏まえ、伊藤有希氏の学位申請論文は一橋大学博士論文（経済学）に値するものと審査委員一同判断する。

2009年10月14日

黒住英司

桑名陽一

斯波恒正

高橋 一（主査）

福地純一郎