博士学位請求論文審査報告書

尾張圭太

”Robust Utility Maximization with Random Endowment
and
Valuation of Contingent Claims under Model Uncertainty”

I．はじめに

1970 年代初頭の Black-Scholes-Merton 等による派生証券価格決定理論は、80 年代に入り Harrison-Pliska、更に Delbean-Schachermayer によりマルチンゲール理論との密接な関連が明らかにされてきた。BSM では完備市場が仮定されていたため、無裁定条件下ではボラティリティーを除き最小限の仮定のもと派生証券価格をユニークに求めることが可能であった。一方、不完備市場における価格決定理論も過去２、３０年に亘り多くの研究者により深化してきている。そこでは上記の仮定に加え何らかの基準がユニーク性を保証するために必要となってくる。本論文では効用最大化を基準とし派生証券の価格決定理論を展開している。　さて、BSM モデルをはじめとし、多くの確率モデルにおいて価格過程は唯一に与えられている。一方、現実にはそのモデルが妥当かについては疑問が残る。この流れの中で、過去１０年数理ファイナンスの分野で研究されてきている問題の一つが本論文で展開されている Robust Utility Maimization である。これは基礎となる確率モデルはユニークではなく、あるクラスの中に存在することを仮定した上での理論展開である。また、効用関数に関しても、単に数学的利便性から、過去においては指数型等が多く用いられていたが近年この部分についても，より一般的な状況に対応すべく、Inada 条件等、より弱い条件下で考察している。本論文はこの様な背景のもと書かれている。それらに加え、非有界な Claim (Random Endowment) もモデルに取り入れられている。

彼のこの分野で達成してきた結果は業績目録にある論文と研究報告に纏められてある。主な論文は [1] ”Robust Exponential Hedging and Indifference Valuation”, [2] ”Robust Exponential Hedging in a Brownian Setting”, [3] ”A Note on Utility Maximization with Unbounded Random Endowment”, そして [4]”Robust Utility Maximization with Unbounded Random Endowment” である。先行研究では Claim に対する有界性や下からの有界性といった条件のみならず、効用関数に対しても強い条件が課せられてきていたが、[4] で尾張氏は Claim (Random Endowment) に対する条件を一様化積分可能性に弱めることに成功した。そこに至る道筋として、先ず [1] では具体的に指数型効用関数を仮定しランダムな Claim が存在する状況下における Robust

Utility Maximization 問題をきちんと解決し、その後の論文で展開された一般的な議論への道筋を作り上げている。序でながら、上記論文中［２］は既に JSIAM Letters より出版されている。[1],[3] については最近 International Journal of Theoretical and Applied Finance と Asia-Pacific Financial Markets にそれぞれアクセプトされている。又彼のこれまでの研究成果は関連学会等でも高い評価を受けて来ている。さて、尾張氏の学位請求論文 "Robust Utility Maximization with Random Endowment and Valuation of Contingent Claims under Model Uncertainty" は上記の結果を纏めたもので、前半部では主に指数効用の世界での議論（[１]、[２]）、そして最終章で本論文の主要結果が提示・証明されている（[4]）。

本論文は以下の６章から構成されている。

Ch. 1 Introduction
Ch. 2 Notations and Basic Concepts
Ch. 3 Robust Exponential Hedging
Ch. 4 Subjective Utility Maximization with Unbounded Random Endowment
Ch. 5 Robust Projections of Probability Measures
Ch. 6 Robust Utility Maximization with Unbounded Random Endowment

第２章は本論文で用いられる確率論と数学の簡単な解説である。

以下第２章を除く各章を簡単に要約する。

Ⅱ．論文の概要

本論文の主要部分は第６章で、４章と５章がその準備に充てられている。一方、本論文は各章ごと独立した結果を求めている為に別個の仮定が設定されている。本報告書では本論文の主要結果に直接関連する仮定のみを提示するが、勿論、各章における結果はこの仮定下で成立することはいうまでもない。従って、先ず、基本的な仮定を提示し、そのもとで第４章以降の内容を要約する。第３章の議論は他の章と比べより具体的である。

$(\Omega,\mathrm{F},(\mathrm{F}_t)_{t\in[0,T]},\boldsymbol{P})$ を補助的な完備確率空間、$\mathfrak{P}$ は $\boldsymbol{P}$ にドミネートされている確率測度の集合、そして S を局所有界な Semimartingale とする。さて、本論文における基本仮定は：

仮定６－１　効用関数 $U:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は連続微分可能、単調増加、強い意味で凸、上から有界で以下の Inada 条件を満足；

$$\lim_{x\to-\infty} U'(x)=\infty, \text{ and } \lim_{x\to\infty} U'(x)=0$$

仮定６－２

$$AE_{-\infty} := \lim \inf_{x \to -\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} > 1,$$
$$AE_{\infty} := \lim \inf_{x \to \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1.$$

仮定６－３　$\mathfrak{P}$ は L^1 で凸、かつ弱コンパクト。

仮定６－４

$$\mathfrak{M}_V^e := \{Q \in \mathfrak{M}_V : Q \sim \mathbb{P}\} \neq \varnothing$$

但し、$\mathfrak{M}_V$ は $inf_{P\in\mathfrak{P}} E^{\mathsf{P}}[V(\frac{dQ}{d\mathsf{P}})] < \infty$, となる $Q \in \mathfrak{M}_{loc}$ の全体である。

仮定６－５　B は F_T- 可測で, ある $\epsilon > 0$ に対して、$\{U(-(1+\epsilon)B^-)\frac{dP}{d\mathsf{P}} : P \in \mathfrak{P}\}$ は一様可積分. 更に、$\sup_{P\in\mathfrak{P}} E^P[U(-\epsilon B^+)] < \infty$ //

第１章は本論文の目的と全体の要約からなっている。本論文の目的は以下の形に纏められる：

先ず、前提として、

①資産過程 S は d 次元半マルチンゲール

② Θ は一定の正則条件を満たすポートフォリオの集合（例えば Θ_{bb} を S に関する確率積分 ($\theta \cdot S$) が下から有界であるような投資戦略の全体）

③ 伝統的には、基本となる確率測度を固定したもとで期待効用の最大化を与えるポートフォリオを求めることであるが、ここでは、基本となる確率測度は唯一でなく、あるクラス $\mathfrak{P}$ の中に存在する。

以上のフレームワークの中で、問題は最も不利な状況下での効用最大化を初期 Claim B が導入されたという設定下で考察することである。即ち、

$$\sup_{\theta\in\Theta} \inf_{P\in\mathfrak{P}} E^P[U(\theta \cdot S_T + B)]$$

ここで、双対性は

$$\sup_{e_{\theta\in\Theta}} \inf_{P\in\mathfrak{P}} E^P[U(\theta \cdot S_T + B)] = \inf_{\lambda>0} \inf_{P\in\mathfrak{P}} \inf_{Q\in M_V} E^p[V(\lambda\frac{dQ}{dP}) + \lambda\frac{dQ}{dP}B)]$$

但し、$V(y) = \sup_x(U(x) - xy), \forall y > 0$ である。いかなる条件下で上式が成立するか、そして右辺、双対問題の解の存在証明と解の導出 (乃至はその性質の解明）が本論文の主要テーマであることが述べられている。又、第１章、第２章では本論文で用いられる基礎的な用語やこれまでの結果も, 同時にコンパクトに纏められている。

第３章では効用を指数型効用関数 $U(x) = -\exp\{-\alpha x\}$ と特定化し

$$\sup_{\theta\in\Theta} \inf_{P\in\mathfrak{P}} E^P[\exp\{-\alpha(\theta \cdot S_T + B)\}]$$

を考察。結果、証明すべき双対性は以下の様に具体的な形で与えられる；

$$\inf_{\theta\in\Theta}\sup_{\mathsf{P}\in\mathfrak{P}} E^P[e^{-\alpha(\theta\cdot S_T+B)}] = \exp\{-\inf_{(Q,P)\in\mathfrak{M}_{ent}\times\mathfrak{P}}(H(Q|P)+\alpha\ E^Q[B])\} \tag{1}$$

但し、$H(Q|P)$ は P に関する Q の相対エントロピー、 $\mathfrak{M}_{ent}$ は $\mathfrak{M}_{loc}$ の部分集合で $P\in\mathfrak{P}$ に対して相対エントロピーが有限なものの全体である。更に、Endowment B に対する比較的弱い仮定下：

$$\{e^{-\alpha\ B}\frac{dP}{d\mathbb{P}}\}_{\mathsf{P}\in\mathfrak{P}}$$

が一様可積分等の仮定を満たせば双対性が解をもち、その解が合理的な性質を持つことを証明した。一方、双対問題については先ず Θ を適切に選択することにより証明、次により一般的なクラスに対しても成立することを示している。本章では特殊なケースを扱っているが、ここで考察された方法は次章以降で展開されている一般的なケースにもちいられている。特に B に対する有界性の仮定が一様可積分性に弱められたことは, 大きな貢献である。又、本章では具体的な例として二次元ブラウン運動に対し、具体的な答えを与えている。

第 4 章では一旦、Subjective Problem に戻り、効用最大化問題を、より一般的な仮定下で考察している。まず、双対問題

$$\sup_{\theta\ \in\ \Theta_{bb}} E[U(\ \theta\ \cdot S_T+B)] = \inf_{\lambda>0}\inf_{Q\in\mathfrak{M}_V} E[V(\lambda\frac{dQ}{d\mathbb{P}})+\lambda\frac{dQ}{d\mathbb{P}}B]$$

を考え、本章では、Rockafellar の定理等を用いて双対性を証明している。

次いで、尾張氏は (1) と同様，ここでも双対問題の解の存在と、解の性質を明らかにしている。特に、ここで求められた解は以下の許容的なポートフォリオの集合 Θ

$$\Theta_{bb}\subset\Theta\subset\Theta_V=\{\theta\in L(S):\theta_0=0,\ \theta{\cdot}S_T\ is\ a\ supermartingale\ under\ \forall Q\in\mathfrak{M}_V\}$$

の中でも最適であることが自然な結果として導出されている。

第 5 章では第 3 章で考察された, 最小エントロピー問題を, より一般的な最小 $f-divergence$ 問題を非有界な Endowment を持つケースへと拡張している。即ち

$$\inf_{(Q,P)\in\mathfrak{Q}\times\mathfrak{P}} f(Q|P)+E^Q[B]$$

を考察、但し、

$$f(Q|P) := E^P[f(\frac{dQ}{dP})]\ if\ Q\ll P,\ \ :=\infty\ else$$

又、 $\mathfrak{Q}$ は $\mathbb{P}$ に対し絶対連続な確率測度の集合である。もしも、 $\mathfrak{P}$ が弱コンパクトであれば $(Q,P)\to f(Q|P)$ を最小とする (Q,P) の存在が保証されることは Follmer and Gundel (2006) で証明されている。尾張氏は彼らの方法

が有界な B をふくむケースではストレートに適用できることを見た後、更に一歩進み非有界な であっても f と B に関して一様可積分性を仮定すれば同様の結果が得られることを示した。

第 6 章

本章で、いよいよ論文の冒頭で述べられている問題 (1.1)（下式左辺）に対する答えを，3 章で展開されたアイディアをベースに、4，5 章の結果を用い求めている。本論文の核心部をなす部分である。ここでも、先ず始めに双対性

$$\sup_{\theta} \inf_{P \in \mathfrak{P}} E^P[U(\theta \cdot S_T + B)] = \inf_{\lambda} \inf_{(Q,P) \in \mathfrak{Q} \times \mathfrak{P}} (V(\lambda Q|P) + \lambda E^P[B])$$

を考察している。ここでは、適当な仮定の下で左辺の sup と inf が交換可能であることを示し、Robust Utility Maximization 問題を 4 章で議論された Subjective 問題へと還元。次いで第 4 章で展開された Subjective 問題における双対定理が $\mathfrak{P}$ の稠密な集合上で成立していることが示されている。ここで適切な極限操作を経ることにより inf に寄与する全ての点での双対性が保証される。その後、第 5 章の結果を適用することにより、双対問題は解くことが出来、最適解 の存在証明し、更に解の性質を明らかにしている（定理６．２，6.11）。

Ⅲ．評価と今後の課題

これまで見てきたとおり、本論文の最も大きな貢献は効用関数に対する一般的仮定と非有界な Random Endowment の導入。それを Robust Utility Maximization 問題の中で考察し、解を双対問題を用いて厳密に特徴付けた事にある。数学的にも非常に難しい問題を本論文のレベルまで解いたことは博士学位論文として十分な水準にあることは言うまでもない。一方、本論文の結果を現実の世界へ応用する側面について見ていくと、残念ながら未だ非常に限られた範囲での結果しか得られていない。より広い意味での Robust Utility Maximization 問題への拡張が望まれる。

以上述べたように本論文は的確な問題意識に裏付けられたモデル構築と、数学的に厳密な解決法を提示している。ここに、審査及び面接の結果を踏まえ、尾張圭太氏の学位申請論文は一橋大学博士学位（経済学）に値するものと審査委員一同判断する。

２０１０年 7 月 14 日

石村直之
桑名陽一
高岡浩一郎
高橋　一（主査）
藤田岳彦