博士学位申請論文審査報告書

申請者：七宮 圭

論文題目：「Wavelet analysis for long memory processes」（長期記憶過程のウェーブレット解析）

1. 論文の主題と構成

本論文は、七宮圭氏が大学院修士課程入学後、一貫して研究してきたウェーブレット領域における時系列データの分析に関する理論的な成果をまとめたものである。ウェーブレットの方法は、時間的従属性の程度が非常に強い時系列データを扱うために考案されたものである。通常の時系列分析が時間領域のみ、あるいは、フーリエ変換の場合は周波数領域のみの分析であるのに対して、ウェーブレット法は、データをウェーブレット変換することにより、時間とスケール（周波数）という 2 つの領域において、同時に、かつ局所的にとらえることができるという利点をもっている。特に、金融時系列などに見られるように、長期記憶性が非常に強い時系列に対しては、通常の時系列分析の方法よりも優れていることが多くの研究により明らかにされてきている。ただし、ウェーブレット法は、通常の時系列分析の方法に比べて、その技術的な高度性や計算の複雑性から、一般にはあまり浸透していないのが現状である。

さて、本論文の具体的な構成は、次の通りである。

Chap. 1 Introduction

Chap. 2 Long memory processes（長期記憶過程）

Chap. 3 Wavelet analysis（ウェーブレット解析）

Chap. 4 Modelling for the wavelet coefficients of ARFIMA processes（ARFIMA 過程のウェーブレット係数のモデル化）

Chap. 5 The exact wavelet-based maximum likelihood estimation for long memory processes（ウェーブレットに基づく長期記憶過程の厳密最尤推定）

Chap. 6 The wavelet estimation for long memory signal plus noise models（ノイズが加わった長期記憶モデルのウェーブレット推定）

Chap. 7 The wavelet-based multi-scale regression with long memory errors and polynomial trends（長期記憶誤差と多項式トレンドをもつような回帰のウェーブレット多重スケール推定）

Chap. 8 Conclusions

Appendix: A note on the time-scale regression via wavelets（ウェーブレットによる時間およびスケール回帰に関するノート）

2. 各章の概要

以下、本論文を構成する各章の主な内容を紹介する。

第 1 章では、本研究に至った動機と背景に触れ、論文全体の内容と研究目的、および、各章相互の関連が述べられている。

第 2 章と第 3 章は、ウェーブレットの方法を使う際の基礎理論について、簡潔にまとめられており、第 4 章以降の本格的な議論のための導入部となっている。特に、本論文では、時系列データのウェーブレット変換が必須であり、第 3 章では、ウェーブレット変換の概念や種類、付随する性質などの基本的事項が述べられている。

第 4 章から第 7 章が、本論文の核心をなす部分である。まず、第 4 章では、長期記憶時系列モデルとして非常によく使われる ARFIMA（Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average）モデルを取り上げて、そこからの観測値のウェーブレット変換の性質を考察している。特に、ARFIMA(p,d,q) 系列の場合、変換後の AR 部分の次数は不変であるが、MA 部分の次数については、差分パラメータ d とフィルターの長さ L に対して、$L/2-d$ の値の大小、および、その値が整数か実数かに依存して変わってくることをスペクトルの観点から調べて、詳細な結果を得ている。例えば、ARFIMA(p,d,q) 系列に対して、Daubechies の $D(L)$ フィルターによるウェーブレット変換を施すと、$L/2-d$ が正整数の場合には、レベル j の変換系列は定常な ARMA(p,q_j) となり、MA 部分の次数 q_j は $p+L-1+(q-d-(p+L-1))/2^j$ 以下となることが示されている。従来の研究では、ARFIMA$(0,d,0)$ の場合には、$L/2>d$ の条件のもとで、変換系列は、周波数帯間、あるいはスケール間でほぼ無相関になるという事実が知られていた。しかし、ここでは、それを精密化して、ウェーブレット系列の厳密なスペクトル密度を計算し、図示することにより、必ずしもそうではないことを詳細に分析している。

第 5 章では、第 4 章の結果を受け、ARFIMA$(0,d,0)$ のウェーブレット系列を無相関とはみなさずに、厳密な尤度関数を導出することにより、モデルのパラメータ

の推定を行っている。ここで、差分パラメータ d は任意の非負実数として、非定常の場合も考慮している。尤度関数は、誤差項のウェーブレット系列から観測値のウェーブレットへの変換のヤコビアンが三角行列で、対角要素がすべて 1 となることから、容易に導出されることを示している。このようにして導出された尤度関数を最大にする推定量として最尤推定量を定義して、その一致性を示している。この推定量の利点は、通常のウェーブレット推定量が、ウェーブレット分散を計算する際に、積分の数値計算を必要とするのに対して、それが不要になる点であり、計算の効率化が図られている。そして、推定量の振る舞いを調べるために、シミュレーション実験も行っている。具体的には、d を区間 $[0, 1.8]$ の間のさまざまな値に設定し、標本サイズも 4 通りの場合を想定した上で、従来の 3 つの推定量（AWE: ウェーブレット系列を無相関とみなした推定量、ELW: 周波数領域における推定量、CSS: 時間領域における推定量）と比較している。1,000 回の繰り返し実験の結果は、AWE や ELW よりも一様によく、時間領域で計算される最尤推定量と同等の CSS と同程度のよさがあることが確認された。

第 6 章では、推定するモデルのクラスを拡張して、signal plus noise model（信号に観測誤差が加わった場合のモデル）における推定問題を考察している。信号に当たる部分は長期記憶過程に従う ARFIMA$(0, d, 0)$ であり、観測誤差は独立系列で信号とは互いに独立と仮定される。観測誤差があるモデルの推定では、SNR（signal to noise ratio：信号の分散を観測誤差分散で除した値）の値が小さくなると、信号と観測誤差の分離・識別が困難となり、推定精度が非常に悪くなるという問題点があり、それは、本質的に困難な不可避的な事実となっている。ただし、どのような推定方法を使うかにより、若干の改善が見られるのも事実である。ここでは、観測誤差を考慮した上で、信号に含まれる差分パラメータ d を推定することが主要な目的となるが、そのために、ウェーブレット系列に変換した上で、信号の部分については、各レベルごとに、 AR(1) の構造をあてはめている。そして、独立な観測誤差のウェーブレット系列との混合で、結局のところ、観測値のウェーブレット系列に対しては、ARMA(1,1) を仮定することにより、尤度関数を導出して、d の推定を行っている。推定量の振る舞いを調べるために、シミュレーション実験を行って、平均 2 乗誤差の観点から、通常の方法（ウェーブレット系列がレベルごとにほぼ無相関と仮定した方法）よりも良好となることを確かめている。

第 7 章は、長期記憶型の誤差項をもつような時系列回帰モデルを取り上げて、説明変数として、長期記憶系列および多項式トレンドを含む場合の長期記憶系列の回

帰係数のウェーブレット推定を議論している。推定方法としては、DWT（通常の直交型ウェーブレット変換）と MODWT（decimate されない非直交型ウェーブレット変換）のそれぞれに基づく推定を考察しており、まず、特定のスケールにおける推定、次に、本章のタイトルが示すような複数のスケールにわたる推定を扱っている。そして、これらの推定量の一致性や漸近正規性を証明している。さらに、DWT と MODWT による推定の効率性を比較して、MODWT による推定の方が効率的であることを示している。この点については、さらに、シミュレーションによって確認している。

第 8 章は、本論文で得られた研究成果を章ごとにまとめており、最後の Appendix は、第 7 章で論じたスケール回帰に関する補足的な説明をしている。

3. 全体的な評価

以上のように、本論文は、ウェーブレットの方法を長期記憶時系列の分析に適用する場合のさまざまな理論的な問題について、従来の研究成果を踏まえた上で論じている。

本論文の貢献としては、次の点が挙げられよう。

1. 長期記憶的な ARFIMA 系列をウェーブレット変換した場合の構造について、スペクトル密度を導出することにより、仔細に検討したこと。このことにより、ウェーブレット系列をほぼ無相関とみなしていた従来の研究に対して、精密な情報を提供した。

2. ARFIMA$(0,d,0)$ モデルの差分パラメータ d の推定を、ウェーブレット変換系列の厳密な尤度関数を導出することにより実行し、推定量の一致性を証明したこと。従来の研究では、ほぼ無相関という近似に基づいて推定していた。

3. ARFIMA$(0,d,0)$ に従う信号に独立な観測誤差が加わったモデルにおいて、ウェーブレット変換系列を ARMA(1,1) に従うものと仮定して尤度関数を導出して、d の推定を行ったこと。従来の研究では、観測誤差がない場合と同様に、ウェーブレット系列が近似的に無相関であることに基づいた推測を行っていた。

4. 時系列回帰モデルにおいて、誤差項および説明変数が長期記憶過程に従う場合の回帰係数を複数のスケールにわたってウェーブレット推定したこと。および、推定量の漸近的性質を導出したこと。従来の研究において行われてきた単一スケールの回帰分析を多重スケール回帰へ拡張した。

これらの成果は、ウェーブレットの方法による時系列分析の分野に重要な貢献をしていると判断できる。

他方、今後の研究課題としては、次の諸点を挙げることができる。

1. 差分パラメータ d のウェーブレット推定を、一般の ARFIMA(p,d,q) モデルに拡張すること。

2. ウェーブレット推定量の一致性だけでなく、漸近分布に関する考察も行うこと。

3. 信号に観測誤差が加わったモデルにおいて、ウェーブレット変換系列に対するモデルを拡張して推定すること。

4. 第 7 章で取り上げた誤差項および説明変数がともに長期記憶過程に従うモデルは、フラクショナルな共和分モデルであると解釈できるので、この観点からの推定問題として、関連する研究との比較を行い、ウェーブレットの方法の利点などを検討すること。

上記の諸課題は、本論文で得られた成果を基盤として、あくまでも将来的な研究の中で取り組むレベルの未解決問題である。

本論文は、このような将来的な課題とは別に、上述の通り、当該分野における重要な貢献をしており、博士学位論文としてふさわしい高い水準にあるものと判断する。また、口述試験で指摘された多くのコメントに的確に対応した改訂がなされている。よって、審査員一同は、七宮圭氏に一橋大学博士（経済学）の学位を授与することが適当であると判断する。

2012 年 3 月 14 日

論文審査員（五十音順）

黒住　英司

桑名　陽一

田中　勝人

本田　敏雄

渡部　敏明

論文審査委員長　田中　勝人