「不完全情報の下での滞在時間信用リスクモデル」要旨

周　怡

本論文は、従来の完全情報信用リスクモデルを拡張し、離散的な情報構造の下で、滞在時間による信用リスク評価モデルを構築し、それに関連する諸問題を考察した。

確率解析のアプローチを用いる信用リスクモデルは、主に構造型と誘導型に分類される。構造型モデルは企業の財務構造、とりわけ資産価値と負債の関係を参考に、デフォルト時間の定義を与える。一方、誘導型モデルは企業の倒産を外生的な事象と認識し、あらかじめ定められたデフォルト過程で特徴付けることが多い。本論文の提案するモデルは、企業の資産価値に基づいてクレジット・リスクの評価を行うという点から、構造型モデルに分類される。イントロダクションでは、研究の背景として、構造型モデルの代表格とも言えるMertonモデルとBlack-Coxモデルの紹介から始まる。これらのモデルは企業価値を拡散過程としてとらえ、負債で表される倒産バリアを下回った時点をデフォルト時間と定義する。Mertonモデルが満期でしか評価できないのに対し、Black-Coxモデルは資産が最初にバリアにヒットした時点をデフォルト時間とする。したがって満期までの間、いつでもデフォルトが起こりうるようになった。デフォルト時間の定義から、初到達時刻モデル（first passage time model）とも呼ばれる。

従来の構造型モデルは、完全情報すなわち企業の財務状況を正確かつ連続的に観測できると仮定している。しかし、この仮定は企業価値過程の連続性と作用しあい、構造型モデルに大きな不具合を起こしてしまう。既に多くの文献に指摘されたように、完全情報構造型モデルでは、デフォルト時刻が可予測な停止時刻となり、それと関連して満期直前の社債の信用スプレッドも0に収束してしまう傾向がある。いずれも市場での観測とは異なる。

この問題点を解決する方法は二通り存在する。一つはもとの拡散過程にジャンプを組み入れ、パスを不連続なものにすることで、倒産の突発性を与える。もう一つは、不完全情報仮定によってデフォルトを予測不能な事象にする。本論文は、二つ目の手法を採用し、不完全情報の下での構造型信用リスクモデルを構築する。近年の研究では、構造型と誘導型モデルは絶対的な取捨選択関係にあらず、参照情報系によってつながっていることが明らかにされた。適切な仮定の下では構造型と誘導型の特長を併せ持つモデルの構築も可能である。この事実は本論文の理論的根拠となる。不完全情報を構成するには、オリジナルの情報にノイズを加える手法と情報を削減する手法がある。本論文は情報削減のアプローチをとり、離散型の増大情報系（フィルトレーション）を用いる。具体的には、企業価値を離散時点でしか観測できず、デフォルトバリアは観測不能と仮定している。

離散情報のほか、本論文の提案するモデルのもう一つの柱はデフォルト時刻の再定義である。この定義の出発点は、一時的な業績の低迷が必ずしも即刻に倒産を引き起こすとは限らないという事実である。この観点から、滞在時間に基づく定義のほうがより現実に近いと思われる。すなわち、企業価値がデフォルトバリアにヒットしたあともすぐには清算せず、バリア以下の滞在時間があるレベル α に達するまで猶予期間を設け、それを超えた時点をデフォルト時刻とする。

2 章ではモデルの設定と離散的情報構造の定式化を行う。2.1 節は企業価値とデフォルトバリアの従う確率過程を与えるほか、モデルのパラメータや相関などにおける拡張の可能性を述べる。2.2 節では数学的準備として、拡大フィルトレーションの理論的要点を紹介する。まず資産価値を代表とする状態変数からなる参照情報系 $\mathbb{F}$ と企業の信用状況（定義関数 $\mathbf{1}_{\{\tau<t\}}$ によって表現される）で生成される $\mathbb{H}$ 導入し、この 2 つのフィルトレーションから拡大フィルトレーション $\mathbb{G}=\mathbb{F}\vee\mathbb{H}$ を定義する。そのあと、デフォルト確率の推定と社債の価格付けによく用いられる intensity approach と hazard process approach を紹介し、両者の比較から、hazard process approach の

ほうがより本研究に適していることを示したあと、$\mathbb{F}$-生存確率経由で $\mathbb{G}$-生存確率を求める方法を提示する。それと同時に、$\mathbb{G}$-インテンシティと $\mathbb{F}$-インテンシティの定義をも与える。最後にデフォルト確率の分解（decomposition）を通じて、デフォルト時刻が接近不可能となる必要十分条件を述べる。2.3 節では滞在時間を扱うにあたって重要な概念である α-quantile の基本を説明し、理論研究と応用の 2 つの側面から紹介する。

3 章はベーシック滞在時間モデル（basic occupation time model）の紹介である。ベーシックという用語は、次章の調整された滞在時間モデル（adjusted occupation time model）と対照的に、企業価値がデフォルトバリア以下にとどまる時間を特別な処理を施さずに加算することを意味している。デフォルト時刻の挙動を把握するために、$\mathbb{G}$-生存確率 $\mathbb{P}(\tau > T|\mathcal{G}_t)$ を調べなければならないが、2.2 節の議論を踏まえて、この問題は $\mathbb{F}$-生存確率に帰着させられることがわかる。実際の計算では、まず離散情報構造がもたらした制約から、評価時点 t まで直近の観測時点 t_k を境目に、場合分けして分析する。t_k 以前は両端が観測値によって留められた Brownian bridge となり、t_k 以降は左端だけ制限されているので、通常のブラウン運動である。情報更新の行われない各区間 $(t_i, t_{i+1}]$ において、ブラウン運動の独立増分とマルコフ性より、0 時点ではなく区間の左端からスタートするようにシフトを入れ、生存条件の不等式を変形させる。$(t_i, t_{i+1}]$ 上の滞在時間 δ_i と終値の同時確率を、「標準ブラウン運動＋0 バリア」のケースからスタートし、「ドリフト付きブラウン運動（およびブラウニアン・ブリッジ）と任意のバリア」に拡張した。また、観測不能なデフォルトバリアに対して、企業価値の観測時点に合わせてある実現値 D_{t_i} を与え、$\mathbb{F}$ と D_{t_i} 両方の条件付き生存確率を計算したあと、D_{t_i} の分布の $D_{t_{i-1}}$ による帰納的表現式を求め、$(k+1)$ 重繰り返し条件付き期待値で最終結果である $\mathbb{F}$-生存確率を導出した。

4 章の調整された滞在時間モデルは、ベーシック・モデルの滞在時間のほか、企業の業績をも勘定に入れたものである。企業価値の落ち込み具合を考慮せずに滞在

時間だけでモデル化すると、デフォルトバリアの近辺に変動している場合と大幅下落した場合の見分けがつかないため、精度が落ちるおそれがある。その解決策として、もとの滞在時間に資産対負債（バリア）の相対価値でウエイトを付けて調整された時間を用いる。平均値をディスカウント・ファクターとする方法もあるが、業績が著しく悪化したときのインパクトを表現すべく、ここでは最小値を採用する。このような調整によって、滞在時間の評価は改善されるが、計算はさらに複雑になる。デフォルトの定義にしたがって、滞在時間と最小値の同時分布が鍵となる。この分布は時間とパスの 2 つのディメンションに関わっているが、滞在時間と α-quantile の inverse 関係より、パスのみの分布に変換される。さらに、$[0,t]$ 上の α-quantile の分布が $[0,(1-\alpha)t]$ 上の最大値と $[0,\alpha t]$ 上の最小値によって表現できるという性質を利用すれば、極端値（extremes）だけに依存する結果となる。3 章と同様、離散観測の制約にしたがい、ブラウン運動と Brownian bridge 両方を考察する必要があり、観測不能なデフォルトバリアについても前述の条件付き期待値法で処理される。

5 章ではまず 3 章と 4 章で導出された滞在時間にかかわる同時分布を利用し、社債の価格付けを行う。構造型モデルの特長を生かし、企業価値に依存するペイオフを仮定した。デフォルト時刻の定義から、満期まで倒産しなかった場合でも、負債をカバーできる資産を所持してない可能性があるので、満期の V_T/D_T で割り引いた額面に 1 より小さい係数 β_1 をかけたものを支払額とする。デフォルトが起こった場合はデフォルト時点の企業価値 V_τ に基づき、倒産コストを考慮して β_1 よりもさらに小さい係数 β_2 をかけた金額を支払う。リスク中立確率測度のもとで、社債の価格はペイオフの条件付き期待値で表されるが、3 章と 4 章の結果を発展させ、またデフォルトの場合は測度変換を行うことによって、価格評価式は得られる。この式に基づき、リスクのある債券のプレミアムとして知られる信用スプレッドの分析に移る。完全情報構造型モデルと違い、拡大フィルトレーションのアプローチの場合、満期の直前でも正の信用スプレッドが認められる。5 章の最後に、$\mathbb{F}$-デフォルト確

率を連続な部分とジャンプに分解し、ジャンプの部分が$\mathbb{F}$-マルチンゲールであることを証明した。この結果を$\mathbb{F}$-デフォルト確率の Doob-Meyer 分解 $F = Z + A$ と見比べ、Z がジャンプ部分に対応しているため、A の連続性が導かれ、デフォルト時刻が完全に接近不能であることが示された。